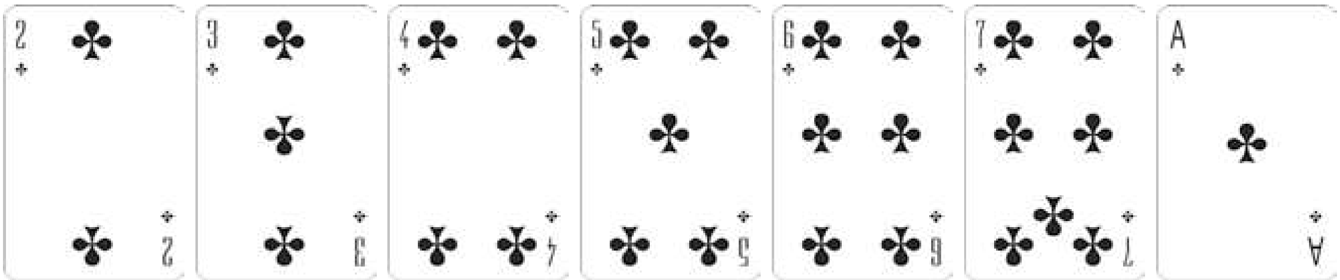
COMUNICAÇÃO INVISÍVEL

JORGE NUNO SILVA
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

Um problema saído nas Olimpíadas de Matemática de Moscovo (OMM) em 2000 deu origem a algumas soluções matematicamente muito interessantes. Uma delas surpreendeu o júri pela simplicidade, mas teve de ser aceite. Acrescentamos mais uma, que também serviu de inspiração para criarmos mais um truque de cartas matemático!



O problema da OMM: *Há três jogadores, o Andrey, o Boris e o Sergey. As cartas são distribuídas da seguinte forma: três para o Andrey, três para o Boris e uma para o Sergey. Nenhum deles sabe nada sobre a distribuição das cartas, além das que tem na mão. Será possível o Andrey e o Boris terem uma conversa, em voz alta, à frente do Sergey, de forma a que fiquem a conhecer a distribuição das cartas e o Sergey continue a saber somente qual é a sua carta?*

A organização esperava uma resolução baseada em aritmética modular. Para facilitar, e sem perda de generalidade, vamos supor que o Andrey tem as cartas A♣, 2♣, 3♣, o Boris tem 4♣, 5♣, 6♣ e o Sergey tem o 7♣. Identificando cada carta com o número de pintas que apresenta, o Andrey soma módulo 7 as suas cartas e diz: "6". O Boris soma 6 aos valores das suas cartas, obtendo 0. Como sabe que só falta somar a carta do Sergey para obter a soma $1+\cdots+7=0$ (mod. 7), conclui que este esconde a carta 7♣. Em conformidade, o Boris anuncia: "A carta do Sergey é o 7♣". Agora é evidente que o Andrey e o Boris conhecem completamente a distribuição, mas o Sergey só conhece a sua própria carta.

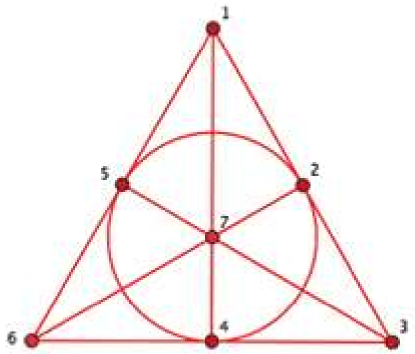
Mesmo que Sergey conheça o processo envolvido, não consegue obter nenhuma informação. Isto deve-se ao facto de haver mais do que uma combinação possível para cada soma parcial módulo 7: 0 = 7+2+5 = 7+3+4 = 1+2+4, 1 = 7+3+5 = 1+2+5 = 1+3+4, 2 = 7+4+5 = 1+3+5 = 2+3+4, 3 = 7+1+2 = 1+4+5 = 2+3+5, 4 = 7+1+3 = 2+4+5, 5 = 7+1+4 = 7+2+3 = 3+4+5, 6 = 7+1+5 = 7+2+4 = 1+2+3.

No lugar da soma modular pode usar-se soma-Nim. Relembremos que para efetuar uma destas somas se escrevem os números em binário e se usa a tabuada $0\oplus 0=1\oplus 1=0$, $1\oplus 0=0\oplus 1=1$. No exemplo acima, o Andrey calcularia $1\oplus 2\oplus 3=0$ e diria: "0". O Boris faria a conta $4\oplus 5\oplus 6=7$ e, sabendo que $1\oplus 2\oplus 3\oplus 4\oplus 5\oplus 6\oplus 7=0$, diria: "A carta do Sergey é o 7♣" (já que $7\oplus 7=0$).

O que há de errado com este processo?

A resposta que surpreendeu os organizadores foi a seguinte. Suponhamos ainda a distribuição acima. O Andrey diz ao Boris: "As minhas três cartas são A♣, 2♣, 3♣ ou as tuas três cartas são A♣, 2♣, 3♣. Claro que o Boris fica logo a saber tudo e responde: "A carta do Sergey é o 7♣". Este processo levanta problemas, já que o Andrey só pode ter a certeza da veracidade da disjunção que anuncia se tiver na mão as cartas A♣, 2♣, 3♣ ...

Uma outra solução, proposta por Ruaan Kellerman, é baseada nas propriedades do plano de Fano. O Andrey constrói uma destas configurações em que as suas cartas sejam colineares e diz: "As minhas cartas correspondem a uma linha reta neste plano".



O Boris conclui imediatamente quais são essas cartas e, com as suas, compreende a distribuição totalmente. As três cartas do Boris pertencem a seis das sete retas do plano de Fano! Isto permite-lhe deduzir a distribuição. Note-se que a informação que o Andrey dá ao Sergey é mínima, as suas cartas podem ser, em princípio, um dos sete conjuntos lineares da configuração.

Como poderemos inventar um truque de cartas matemático, de fácil execução, a partir deste problema olímpico?

Relembremos a questão do número anterior.

1. Neste problema, cuja autoria David atribui a Nob Yoshigahara, cada letra $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ representa um dígito positivo diferente. Que valores tem cada uma delas de forma a valer a seguinte igualdade?

$$\frac{A}{BC} + \frac{D}{EF} + \frac{G}{HI} = 1.$$

(BC, EF, HI são números que se escrevem com dois dígitos).

Solução:

$$\frac{5}{34} + \frac{7}{68} + \frac{9}{12} = 1.$$

2. O inspetor Lestrade entra na sala de jantar. O corpo jaz no chão. Quatro pessoas manifestam-se.

Ágata: Eu sei quem a matou.
Bravo: Eu matei-a.
Carla: O Bravo matou-a.
Dário: Não foi o Bravo nem a Carla.

Há que determinar quem é responsável pelo crime em duas hipóteses diferentes: a) Todos mentem; b) Só uma pessoa mente.

Solução: a) A Carla; b) O Bravo (o Dário é o mentiroso).

3. É fácil fazer um quadrado com quatro fósforos. Também não é difícil fazer dois quadrados com sete fósforos. E fazer dois quadrados com seis fósforos? (Os quadrados devem ter o mesmo tamanho, os fósforos, que não dobram nem partem, também não se cruzam.)

Solução de Tiago Robalo: