SOLUÇÕES GEOMÉTRICAS DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Fátima Vinagre

Escola Secundária da Azambuja

mfatimavinagre@gmail.com

INTRODUÇÃO

A técnica que iremos tratar consiste num método geométrico de determinação das soluções de equações algébricas a uma incógnita, usado por Lill na sua publicação de *Nouvelles Annales de Mathematiques*, Série 2, Vol. 6, 1867, pág. 359, particularizado para equações quadráticas a uma incógnita.

Para aplicar este método necessitamos apenas de usar papel milimétrico, um esquadro e um compasso ou um qualquer programa informático de geometria dinâmica.

Ao que se conhece, foram poucos os autores a descrever esta técnica, o que é surpreendente, dada a sua aparente simplicidade, tendo sido inicialmente descrita para equações quadráticas com soluções reais.

Existem rumores de que o método era conhecido em certas regiões de França e de que alguns professores de matemática elementar e do ensino secundário o deram a conhecer aos seus alunos.

Pretende-se que com este método o leitor tenha ao seu dispor uma técnica de visualização das soluções de qualquer equação quadrática em função da variação dos coeficientes da respetiva equação algébrica.

SOLUÇÕES GEOMÉTRICAS DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Considere-se a família de equações algébricas do segundo grau a uma incógnita, na sua forma canónica,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

com a, b e c coeficientes reais, sendo não nulo.

Este artigo tem como objetivo apresentar um caso particular do método de Lill que determina as soluções geométricas de uma equação algébrica, nomeadamente para determinar as soluções geométricas de uma equação quadrática, usando um esquadro e um compasso.

Como se sabe, as soluções deste tipo de equações são dadas algebricamente por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Comece-se por expressar os coeficientes a, b e c através de segmentos de reta, formando uma linha poligonal aberta em que segmentos de reta consecutivos são perpendiculares entre si. [1] Designemos esta linha poligonal por caminho.

Construa-se o caminho da seguinte forma:

De um ponto O, tomado arbitrariamente, constrói-se um segmento de reta OA com comprimento igual a $|a|$ e considera-se este segmento de reta como a unidade de comprimento.

Perpendicularmente a AO, desenha-se um segmento de reta AB com comprimento igual a $|b|$, ficando B à esquerda de A, se b for positivo, e B à direita de A, caso b tenha sinal contrário.

Por fim, perpendicularmente ao segmento de reta AB, desenha-se um segmento de reta BC com comprimento igual a $|c|$, ficando C abaixo de B, se c for positivo, e C acima de B, se c for negativo.

O caminho construído tem extremidades em O e C, os segmentos de reta consecutivos que o constituem formam entre si ângulos retos e são em número igual ao número de termos que tem uma equação quadrática.

De seguida, construam-se, se possível, outros caminhos que liguem O a C, mas agora com menos um segmento de reta do que o caminho inicial e designem-se estes por caminhos reduzidos. Os segmentos de reta que os constituem devem ser perpendiculares.

Se existirem tais caminhos reduzidos, estes existem no máximo em número igual ao grau da equação, ou seja 2, cuja demonstração deixamos a cargo do leitor.

Assim, se pudermos ir do ponto O ao ponto C, fazendo um ou dois outros caminhos $OA'C$ e $OA''C$, com menos um segmento de reta do que o caminho inicial, em que A' e A'' pertencem a AB do caminho inicial (ou a uma reta que contém AB), então o comprimento de AA' e AA'' são os valores absolutos das raízes (ou soluções) reais da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Repare-se que, construindo um caminho inicial $OABC$ conforme descrito anteriormente e considerando o segmento de reta[1] que une os pontos O e C, é possível construir uma circunferência de diâmetro com compri-

[1] Tal segmento de reta existe sempre, uma vez que $a \neq 0$.

mento igual a $\overline{OC}$ e centro no ponto médio do segmento de reta OC.

Considere-se a reta r perpendicular ao segmento de reta OA que passa no ponto A.

Então, a circunferência ou não interseta a reta r ou interseta-a em um ou dois pontos.

Se a circunferência não interseta a reta r, então não é possível construir um caminho reduzido e, portanto, a equação não tem raízes reais.

Se a circunferência interseta a reta r em um ou dois pontos, então é possível construir um ou dois caminhos, respetivamente, fazendo uso de conhecimentos básicos de geometria euclidiana no plano.

Vejamos o que acontece quando a circunferência interseta a reta em apenas um ponto (figura 1). Seja A' esse ponto.

Como a circunferência tem diâmetro OC e A' é o ponto de tangência da circunferência com a reta r, então ou A' coincide com A, ou A' é distinto de A.

Se A' coincide com A, então $\overline{AA'} = 0$ e, portanto, zero é o valor absoluto da raiz real de uma equação do 2.º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, uma vez que quando A' coincide com A, necessariamente $b = c = 0$ e, consequentemente, a equação tem apenas uma raiz real, sendo esta igual a zero.

Se A' é distinto de A, então considera-se o caminho reduzido $OA'C$ [2].

Note-se que neste caso, ou os pontos O e C estão abaixo da reta r, ou estão ambos acima desta.

Considere-se que os pontos O e C estão abaixo da

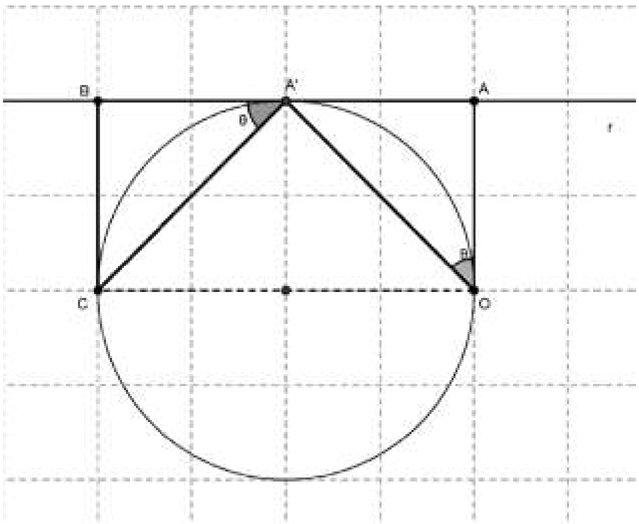

Figura 1.

reta r. Então, $a, c \in \mathbb{R}^+$.

Tome-se, sem perda de generalidade, $b \in \mathbb{R}^+$.

Como a reta r é tangente à circunferência no ponto A' e o seu diâmetro é OC, o ponto A' está entre os pontos A e B.

Considerando, no caminho inicial, o comprimento $\overline{OA} = |a| = a$ como unidade de comprimento (u.c.), $\overline{AB} = |b| \cdot \overline{OA} = ba$ e $\overline{BC} = |c| \cdot \overline{OA} = ca$, isto é, $\overline{AB} = b$ (u.c.) e $\overline{BC} = c$ (u.c.).

Suponha-se que o comprimento $\overline{AA'}$ é x unidades de comprimento e $x < b$.

Como xa é o comprimento do segmento de reta AA', necessariamente xa $\in \mathbb{R}^+$.

Seja $x = -x_1$ com $x_1 \in \mathbb{R}^-$.

Então, podemos afirmar que $\overline{AA'} = x_1 a$ e que

$$\overline{A'B} = \overline{AB} - \overline{AA'} = AB - (-x_1 a) = ba + x_1 a.$$

Seja θ a amplitude do ângulo $\angle AOA'$.

Então, a amplitude do ângulo $\angle CA'B$ é θ.

Considerando o triângulo retângulo $[OAA']$, podemos afirmar que

$$\tan\theta = \frac{-ax_1}{a} = -x_1. \tag{1}$$

Por outro lado, considerando o triângulo retângulo $[A'BC]$, tem-se

$$\tan\theta = \frac{ca}{ba + x_1 a} = \frac{c}{b + x_1}. \tag{2}$$

Logo, pelas equações (1) e (2) vem

$$\begin{aligned} -x_1 &= \frac{c}{b+x_1} \\ \Leftrightarrow x_1 &= \frac{-c}{b+x_1} \\ \Leftrightarrow bx_1 + x_1^2 &= -c \\ \Leftrightarrow x_1^2 + bx_1 + c &= 0. \end{aligned}$$

Concluindo-se que $x_1 \in \mathbb{R}^-$ é uma raiz real de uma equação do 2.º grau, sendo $|x_1|$ o comprimento do segmento de reta AA' tomando como unidade de comprimento $\overline{OA} = |a|$.

De modo análogo, demonstra-se que quando os pontos O e C estão acima da reta $r, a, c \in \mathbb{R}^+$ é uma raiz real de uma equação do 2.º grau, sendo $|x_1|$ o comprimento do segmento de reta AA' tomando como unidade de comprimento $\overline{OA} = |a|$.

Quando a circunferência interseta a reta r em dois pontos A' e A'', estes dão origem a dois caminhos reduzidos, $OA'C$ e $OA''C$ e aplicando um procedimento idêntico ao efetuado anteriormente, verifica-se que os comprimentos de AA' e AA'' são os valores absolutos das raízes reais da equação $ax^2 + bx + c = 0$, tomando como unidade de comprimento o segmento de reta AO.

Atendendo ao que foi referido anteriormente, podemos afirmar, quanto ao sinal das raízes da equação, que estas são positivas se os pontos A' e A'' estão à direita de OA (variando de O a A), e são negativas se estes pontos se encontram à esquerda de OA.

Vejamos um exemplo para clarificar o que se acabou de afirmar.

Considere-se a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ cujos coeficientes são $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$.

Então, construindo os caminhos conforme o procedimento anterior, vem a figura 2.

Pelo que as soluções reais da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ são $x = 2$ ou $x = 3$.

Vejamos outro exemplo, confrontando com a representação gráfica da função respetiva.

Considere-se a equação $x^2 + 3x + 2 = 0$ cujos coeficientes são números positivos.

O caminho inicial encontra-se representado a negrito na figura 3.

Atendendo a que, de modo geral, qualquer equação algébrica pode ser dividida pelo seu coeficiente do termo de maior grau, em particular, numa equação quadrática do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, se dividirmos ambos os membros pelo coeficiente do termo de maior grau, vem, sem perda de generalidade, que

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

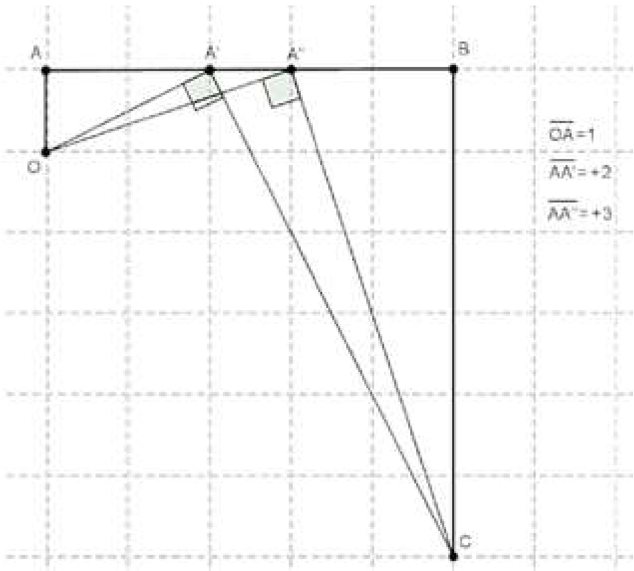

Figura 2.

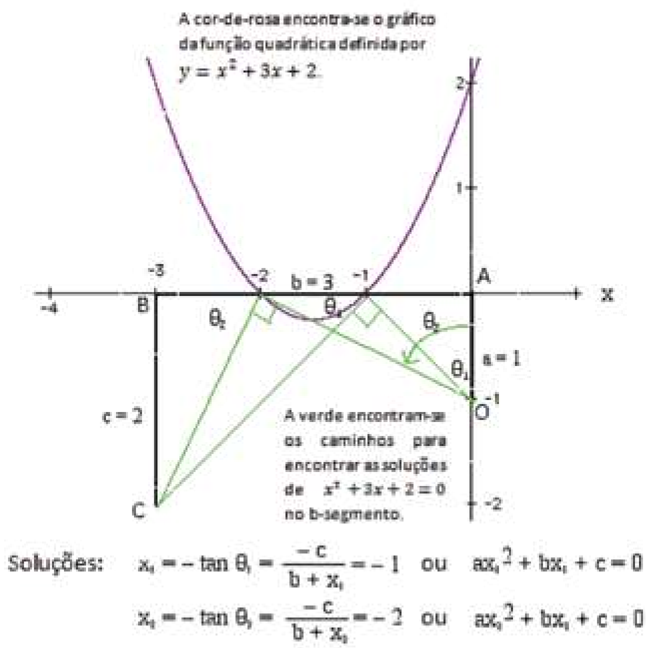

Figura 3.

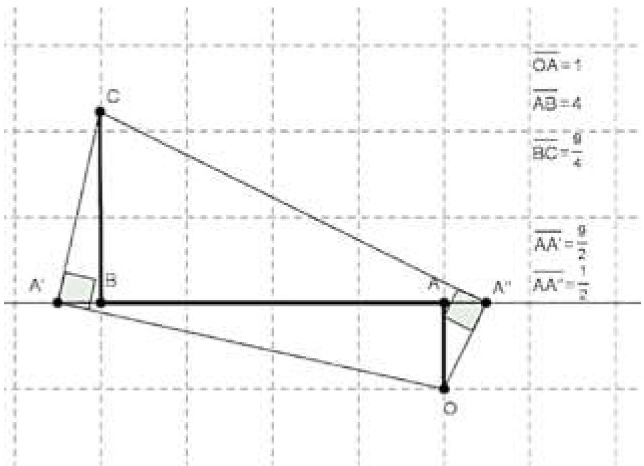

Figura 4.

Assim, convencionando que o segmento de reta respeitante ao coeficiente do termo de maior grau, OA, é desenhado verticalmente, no sentido de baixo para cima, com comprimento 1 e em que A coincide com a origem do eixo horizontal onde se encontram as soluções da equação e que a partir desta origem se desenha o segmento de reta, AB, horizontalmente, com comprimento igual a $|b/a|$,

[2] $OA'C$ é um caminho reduzido tendo em conta que os pontos O, A' e C formam um triângulo retângulo em A', dado que está inscrito numa circunferência de diâmetro OC e A' é um ponto da circunferência.

no sentido da direita para a esquerda quando b/a é positivo e no sentido contrário no caso de b/a ser negativo e por fim, desenha-se, a partir B, o segmento de reta vertical, BC, no sentido de cima para baixo, quando c/a é positivo e no sentido contrário quando c/a é negativo, com comprimento igual a $|c/a|$.

Note-se que se apenas o coeficiente c for negativo ou os coeficientes b e c forem ambos negativos, então o caminho reduzido não irá intersetar diretamente o segmento de reta AB, mas sim a reta que o contém.

Desenhando todos os caminhos reduzidos que intersetam o segmento de reta AB ou a reta que o contém, obtêm-se as várias soluções reais da equação.

Vejamos um exemplo em que apenas c é negativo.

Considere-se a equação

$$x^2 + 4x - \frac{9}{4} = 0$$

e a sua representação geométrica (figura 4). Como A' está à esquerda de OA e $\overline{AA'} = 9/2$, então uma das raízes reais da equação $x^2 + 4x - 9/4 = 0$ é $-9/2$.

Como A'' está à direita de OA e $\overline{AA''} = 1/2$, então a outra raiz real da equação $x^2 + 4x - 9/4 = 0$ é $1/2$.

Efetivamente, numa equação quadrática a uma incógnita facilmente se determinam os caminhos reduzidos e, consequentemente, as suas soluções reais, caso existam, bastando para tal desenhar uma circunferência com centro no ponto médio do segmento de reta OC e considerar os caminhos reduzidos formados pelos catetos dos triângulos retângulos com vértices nos pontos O e C e nos pontos de interseção da circunferência com o segmento de reta AB ou a reta que o contém, sendo esses pontos de interseção as soluções reais da equação quadrática.

Para ilustrar o que se acabou de referir, observe a figura 5.

Para facilitar a interpretação, considere-se AB contido no eixo das abcissas e OA contido no eixo das ordenadas.

Se a circunferência não intersetar o segmento AB nem a reta que o contém, então a equação quadrática não tem soluções reais.

Vejamos como se deve proceder para determinarmos as soluções imaginárias.

Constrói-se um caminho inicial de modo análogo ao referido anteriormente.

De seguida, translada-se o segmento de reta OA para o ponto B (ponto de interseção de BC com AB) de modo a não o sobrepor com o segmento de reta BC e designe-se por $O'C$ o segmento de reta resultante, com comprimento $(c + a)$, e desenha-se a circunferência com centro no ponto médio do segmento de reta $O'C$ e que passa nos pontos O' e C.

Considera-se o segmento de reta formado pelos pontos de interseção da circunferência com o segmento de reta AB ou a reta que o contém.

De seguida, constrói-se uma nova circunferência com centro no ponto médio deste segmento de reta e diâmetro igual ao mesmo.

Esta última circunferência interseta o segmento de

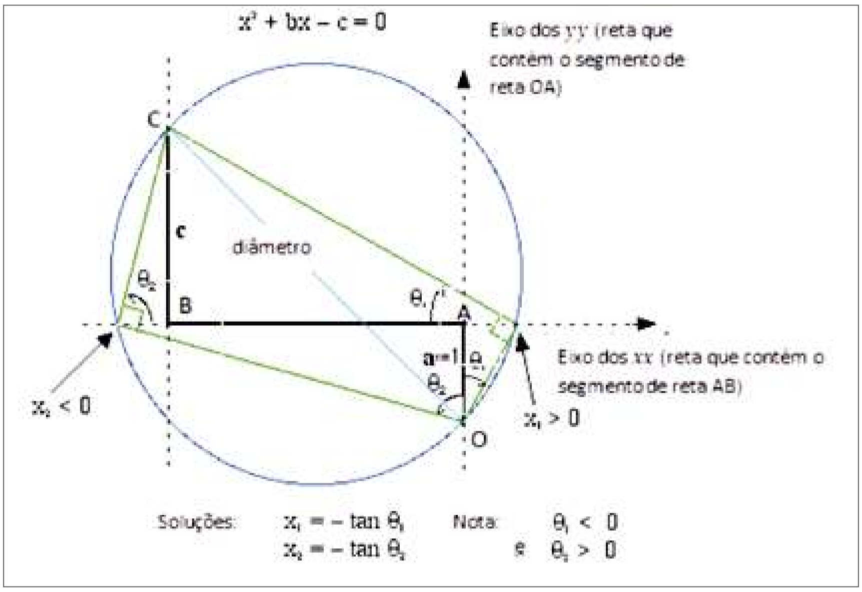

Figura 5.

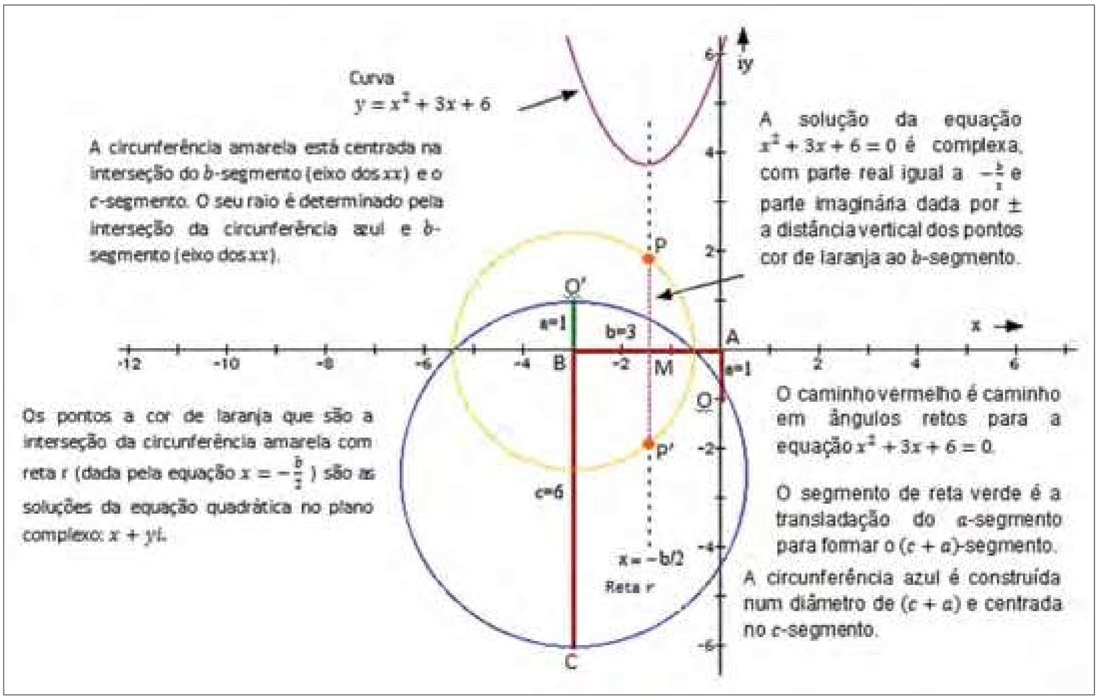

Figura 6.

reta BC num ponto e uma reta r, perpendicular ao segmento de reta AB e que interseta AB no seu ponto médio M, em dois pontos. Sejam estes pontos P e P'.

O valor da parte imaginária da solução para a equação é então dado pela distância vertical, ao longo da reta r, entre AB e os pontos P e P'.

Quanto à parte real das soluções da equação, estas têm parte real com valor absoluto igual ao comprimento de AM e o sinal negativo, se M está à esquerda de OA, e positivo, se M está à direita de OA.

Para terminar, ilustre-se o método de determinação das soluções imaginárias através da figura 6.

Um olhar rápido pela figura acima permite-nos ainda afirmar que a parte imaginária da solução complexa é igual à raiz quadrada da distância vertical entre o ponto mínimo da curva e o eixo dos xx, o que é uma outra forma de visualizar a solução complexa da equação.

As demonstrações de que as construções realizadas são válidas são efetuadas com base na aplicação de teoremas simples de geometria plana que deixamos a cargo do leitor.

REFERÊNCIAS

[1] Lill, E., *Nouvelles Annales de Mathematiques*, Série 2, Vol. 6, 1867, pág. 359

SOBRE A AUTORA

Fátima Vinagre é é professora de Matemática na Escola Secundária da Azambuja, licenciada em Matemática - Ramo Educacional, pela FCT-UNL, e mestre em Matemática – Grupos Cristalográficos Tridimensionais, pela Universidade de Aveiro. Exerceu funções de professora auxiliar de Álgebra Linear e Geometria Analítica e Análise Matemática I na FCT-UNL, foi responsável pela coordenação de Cursos de Especialização Tecnológica, presidente de um Conselho Técnico-Pedagógico, orientadora de estágios – profissionalização em serviço, avaliadora de pessoal docente e não docente, subdiretora e vice-presidente da Escola Secundária de Montejunto, entre outras funções.