Amílcar Branquinho
Universidade de Coimbra
ajplb@mat.uc.pt

ARQUIMEDES, UMA MENTE BRILHANTE

Caro leitor, vamos ver como alguns modelos e princípios devidos a Arquimedes estão na base da teoria matemática que se conhece hoje como Cálculo Integral.

A matemática pode ser vista como uma ciência utilitária; para tal basta analisar os programas de estudo dos cursos de qualquer Faculdade de Ciências, que incluem disciplinas de Cálculo, Álgebra, Estatística ou Matemáticas Gerais. De uma forma geral estas disciplinas tratam temas de matemática de maneira clássica sem relação com o curso a que estão destinadas, o que pode constituir um problema. Acresce ainda que, para os alunos de uma licenciatura em Matemática, é importante ver como se intuem fórmulas de Física sem ter o *porto seguro* de axiomas, definições e rigor.

A motivação ao escrever este texto é dupla: por um lado pretendemos levar os alunos a contemplar alguns temas de divulgação que dentro de algum tempo formarão parte dos seus estudos universitários e, por outro, queremos ajudar a difícil tarefa de incluir, nos estudos de matemática, temas de Física, despertando no aluno o gosto pela análise abstrata destes temas. Isto pode contribuir para o desenvolvimento nos estudantes de capacidades dedutivas e de uma postura de investigador fundamental ao seu processo de crescimento. Devemos lembrar-nos de que foi pela admiração que o Homem começou a filosofar.

UM POUCO DE HISTÓRIA. Pode dizer-se que, de entre as descobertas que Arquimedes fez, a de que mais se orgulhava era do cálculo do volume de uma esfera. Demostrou, de uma forma bastante original, que

> *o volume de uma esfera é igual a dois terços do volume do cilindro que a circunscreve.*

Ficou de tal forma maravilhado com esta descoberta que, como recordação da melhor das suas ideias, mandou gravar na sua pedra tumular a figura 1. Quando Cícero foi nomeado questor na Sicilia (75 a.C.), descobriu o túmulo de Arquimedes, graças à inscrição que este tinha mandado gravar no seu túmulo e que os seus conterrâneos de

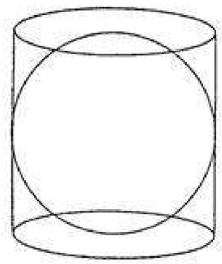

Figura 1. Símbolo de Arquimedes.

Siracusa tinham perdido de vista. Cícero restaurou-a, para mais tarde voltar a perder-se. Recentemente encontraram-se dois túmulos que disputam a autenticidade...

IDEIA DA DEMONSTRAÇÃO. Arquimedes imaginou uma semiesfera e junto dela um cilindro circular reto e um cone circular reto, ambos de base igual à do círculo máximo da semiesfera, mais ou menos como indicado na figura 2. Arquimedes cortou as três figuras por um plano paralelo à base do cilindro e do cone, perguntando-se como seriam as secções determinadas por este plano no cilindro, na semiesfera e no cone. Determinemos a área das regiões indicadas na figura 2.

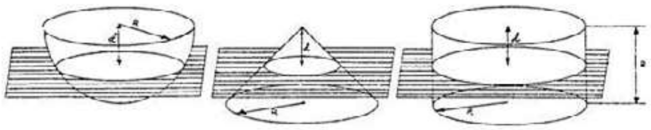

Figura 2. Método de Arquimedes.

No cilindro, é evidente, pois trata-se de um círculo de raio *R*. Na esfera, também se tem um círculo, mas o seu raio depende da altura do corte, *d*. Olhando melhor para a figura 2 e tendo em conta o teorema de Pitágoras, facilmente se pode escrever, considerando o raio da secção igual a r, que $r^2 + d^2 = R^2$. Já no cone, a secção também será um círculo e agora o raio é ainda mais fácil de determinar; como a sua abertura é de 45º, $r = d$, i.e., a secção do cilindro coincide com a secção da semiesfera adicionada da secção do cone, pelo que o volume do cilindro é igual à soma dos volumes da semiesfera e do cone (cf. figura 3).

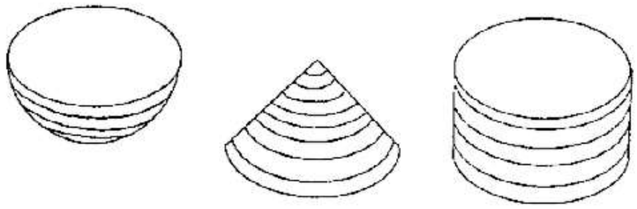

Figura 3. Secções cilíndricas.

Assim,

$$\pi R^3 = \text{Volume da semiesfera} + \pi R^3/3\,,$$

pois Arquimedes sabia que os volumes do cilindro e do cone são, respetivamente, πR^3 e $\pi R^3/3$; logo, obtemos que o volume da semiesfera é $2\pi R^3/3$, c.q.d.

Esta demonstração pode ser encontrada em textos de matemática elementar, como o de Miguel de Guzmán, "Experimentos de Geometria".

Com este resultado, Arquimedes avançou para a determinação da *área da superfície de uma esfera de raio R*. Considerou a esfera composta por *muitas* pirâmides de vértice no centro da esfera e base de área muito *pequena*, *S*, sobre a esfera. Para ter uma ideia do que pode valer a área de superfície esférica, considerou que o volume da esfera é, como acabámos de ver, $4\pi R^3/3$ e que o volume de cada pirâmide é $R\,S/3$ (pois a altura de cada pirâmide é R). Somando o volume de todas as pirâmides e colocando em evidência $R/3$, obtemos:

o volume da esfera é igual à área de superfície da esfera multiplicada por $R/3$.

Logo, a área de superfície da esfera de raio R é igual a $4\pi R^2$.

EXPERIÊNCIA. Propomo-nos comprovar por experimentação o princípio de Arquimedes, ao mesmo tempo que mostramos uma *relação* entre integrais de volume e de superfície. Vamos utilizar uma bola de borracha, um copo de água, uma régua, um cordel, uma caneta de feltro, uma balança e um nónio (cf. "Cálculo Diferencial e Integral", de Fernando Chamizo).

Coloquemos a bola numa tina com água e marquemos a linha de flutuação com a caneta de feltro (para efetuar esta operação convém segurar a bola com a mão sem a afundar e marcar somente alguns pontos por forma a completar a linha com a bola fora da água e munidos de um canudo de papel).

No paralelo determinado pela linha de flutuação (que é a circunferência traçada), marquemos dois pontos diametralmente opostos. Para tal, podemos simplesmente estender o cordel sobre a circunferência, desenrolá-lo, marcar o ponto médio e voltar a enrolar à volta da bola como mostra a figura 4. Entre estes dois pontos, estiquemos o cordel de forma a descrever um arco de meridiano para que possamos medi-lo. A partir do comprimento do meridiano, determinamos o raio da bola (recorde-se que, em radianos, o ângulo ao centro é dado pelo quociente entre o comprimento do arco e o raio da circunferência). Com o nónio é trivial este cálculo!

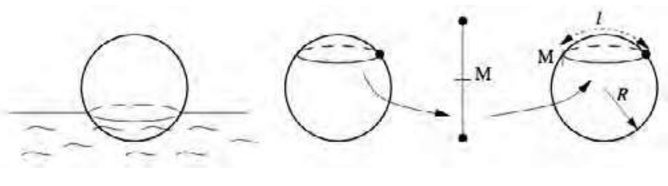

Figura 4. Descrição da experiência.

Escolhendo uma bola de borracha um pouco mais pequena do que uma bola de ténis, os valores encontrados para o comprimento do arco, ℓ, e do raio da bola, R, foram de $\ell = 8.9$ cm e $R = 2.8$ cm. Aplicando a fórmula

$$\frac{\pi R^3}{3}\Big(2 - 3\cos\left(\ell/(2R)\right) + \cos^3\left(\ell/(2R)\right)\Big), \qquad (1)$$

com ℓ e R em centímetros (com os dados citados anteriormente, obtemos 47.25), podemos verificar que este resultado está muito próximo do peso real da bola (considerado em gramas). Basta para tal usar uma balança de cozinha (no nosso caso, a bola pesa aproximadamente 45 gr). Assim, a partir da observação de como uma bola flutua podemos saber quanto é que ela pesa.

EXPLICAÇÃO. O que está na base da experiência anterior é o *princípio de Arquimedes*:

> *todo o corpo mergulhado num líquido está sujeito a uma força de direção vertical, de sentido de baixo para cima, e cuja grandeza é igual ao peso do volume de líquido deslocado.*

Como o impulso deve compensar o peso da bola e o *líquido deslocado*, que neste caso é a água, cuja massa e o volume coincidem, basta verificar que a fórmula (1) dá o volume da parte submersa da bola (cf. figura 5). Para determinar a massa da bola, integramos a função indicatriz da região correspondente, T, que em *coordenadas esféricas* $\mathsf{X}(\phi,\theta,\rho) = \left(\rho\cos\phi\,\operatorname{sen}\theta,\, \rho\operatorname{sen}\phi\,\operatorname{sen}\theta,\, \rho\cos\theta\right)$ se descreve (considerando a origem do referencial no centro da bola) como

$$(\phi,\theta,\rho) \in [0,2\pi] \times [\pi-\theta_0,\pi] \times [R_0,R],$$

com $R_0 = -R\cos\theta_0/\cos\theta$ e $\theta_0 = \ell/(2R)$, i.e.

$$\int_T 1 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\pi-\theta_0}^{\pi} d\theta \int_{R_0}^{R} |J_{\mathsf{X}}|\, d\rho,$$

onde $|J_{\mathsf{X}}| = \rho^2 \operatorname{sen}\theta$, que coincide com (1).

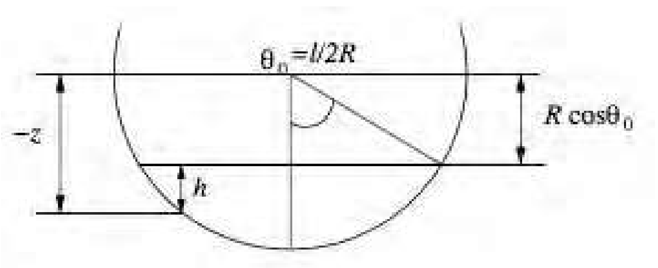

Figura 5. Leitura em coordenadas esféricas.

Acabámos de ver como o princípio de Arquimedes permite calcular a massa por meio de um integral de volume. Agora, usando a noção de *pressão*, veremos como determinar a massa da bola mediante um integral de superfície.

Chegados aqui, podemos perguntar-nos se existe uma relação geral entre estes dois integrais? A resposta afirmativa é dada pelo teorema de Gauss ou da divergência.

O que faremos é utilizar as ideias básicas previamente apresentadas, concetualmente mas não historicamente, no princípio de Arquimedes, que nos levarão a expressar o impulso como um integral de superfície.

Imaginemos um *quadradinho* infinitesimal de área A paralelo à superfície da água e situado a uma profundidade h. O peso da água por cima desse quadradinho será $m\,g = A\,h\,g$ (considerando a densidade unitária, temos que a massa coincide com o volume que, por isso, vale $A\,h$). Se pudéssemos retirar repentinamente essa coluna de água, por ação e reação, a água que está por baixo saltaria para cima com uma força $A\,h\,g$. Assim, a uma profundidade h há uma força por unidade de superfície dada por $\mathsf{P} = (0,0,h\,g)$.

Normalmente, esta força é compensada pelo peso da água que está por cima, que na nossa experiência é o peso da bola. Vale a pena notar que P atua sobre uma superfície curva onde a profundidade e a direção onde se aplica a força vai mudando de ponto para ponto. Por isso, a força total é dada pelo integral de P na superfície submersa, S, fronteira de T, e deve estar compensada pelo peso $m\,g$ da bola. Em conclusão, considerada a superfície, S, com a orientação usual temos

$$mg + \int_S \mathsf{P} = 0. \qquad (2)$$

Para calcular o integral, convém parametrizar a superfície, S, usando coordenadas esféricas, i.e. S é descrita por $0 \le \phi \le 2\pi$, $\pi - \theta_0 \le \theta \le \pi$ e $\rho = R$. Pode ver-se que o vetor normal, N, a S é dado por $\mathsf{N} = R\operatorname{sen}\theta\,\mathsf{X}(\phi,\theta,R)$ e que a profundidade do ponto (x, y, z) sobre a superfície esférica é $h = -z - R\cos\theta_0 = -R\left(\cos\theta + \cos\theta_0\right)$ (como mostra a figura 5).

Assim, (2) leva-nos ao integral

$$m = R^3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\pi-\theta_0}^{\pi} \left(\cos\theta + \cos\theta_0\right) \times \operatorname{sen}\theta\,\cos\theta\, d\theta$$

que coincide uma vez mais com (1).