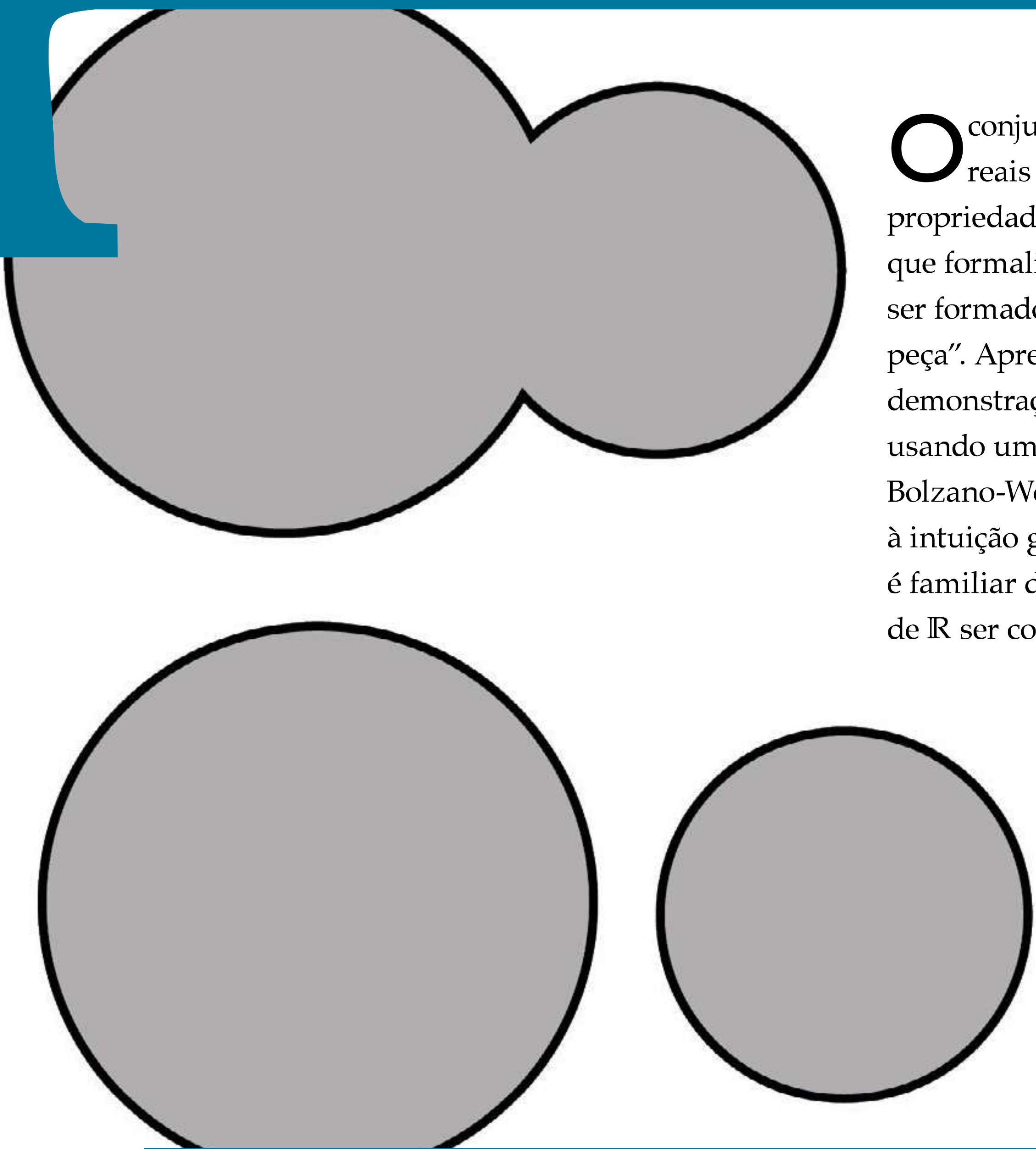

O conjunto dos números reais é conexo, uma propriedade topológica que formaliza o conceito de ser formado por "uma só peça". Apresentamos uma demonstração deste facto usando uma construção de Bolzano-Weierstrass, que apela à intuição geométrica, e que nos é familiar das demonstrações de $\mathbb{R}$ ser compacto.

UMA DEMONSTRAÇÃO DO TIPO BOLZANO–WEIERSTRASS DE QUE QUALQUER INTERVALO EM $\mathbb{R}$ É CONEXO

Sagar Pratapsi

Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra
sagar.dipak@gmail.com

A noção de conjunto conexo é da maior importância em Matemática, ocupando um lugar central, por exemplo, em muitas questões da Análise, incluindo Análise Complexa. Esta noção pretende formalizar a intuição de um conjunto ser formado por uma só "peça", por oposição a duas ou mais peças separadas, como ilustram os exemplos da Figura 1.

A definição aparece habitualmente quando se estuda Topologia, porque se consegue apresentar usando o conceito primitivo de conjunto aberto. Depois de apresentada a definição exata, surge naturalmente o problema de determinar quais são os conjuntos conexos em $\mathbb{R}$, o mais importante e básico dos espaços topológicos, com os conjuntos abertos habituais (cuja definição recordamos a seguir). A intuição diz-nos que deverão ser os intervalos, os subconjuntos dos reais que não têm "buracos". Mas em Matemática, e em especial neste tipo de questões fundamentais, a intuição não chega, sendo necessário definir os conceitos e provar as afirmações com todo o rigor.

O propósito desta nota é precisamente apresentar uma nova demonstração para esse resultado clássico, que em $\mathbb{R}$ os conjuntos conexos são os intervalos.

Para tal, vamos utilizar uma construção do tipo Bolzano–Weierstrass, ou bissecção de intervalos, que é a técnica habitualmente usada para mostrar que, em $\mathbb{R}$, os conjuntos compactos são os fechados e limitados. A construção consiste em dividir o conjunto de interesse em metades sucessivas, mantendo aquelas que têm a propriedade desejada, até se atingir um ponto limite. Neste limite, chega-se a uma contradição e prova-se o pretendido.Esta construção parece ter sido usada originalmente por Bolzano para provar o Teorema do Valor Intermédio [1]. A prova original encontra-se traduzida em inglês em [2].

Começamos por definir os intervalos em $\mathbb{R}$.

Definição. *Um conjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo se, quaisquer que sejam $x, y \in I$, se $z \in \mathbb{R}$ for tal que $x < z < y$, então $z \in I$.*

Assim, como é habitual, os intervalos são os conjuntos da forma $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$ e $]a,b[$ e também os conjuntos que se estendem indefinidamente como $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$ e o próprio $\mathbb{R}$.

Como já referimos, sendo a conectividade um conceito topológico, é necessário definir os conjuntos abertos de $\mathbb{R}$.

Definição. *Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ diz-se aberto se, para todo o $x \in A$, existir um $\epsilon > 0$ tal que o intervalo $]x-\epsilon, x+\epsilon[$ está contido em A.*

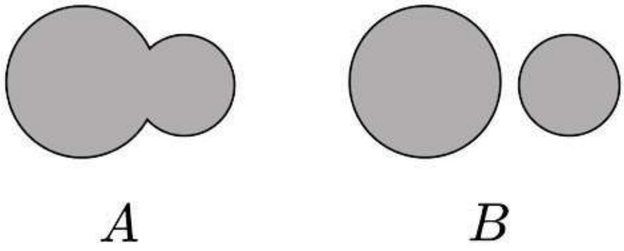

Figura 1. Exemplo de um conjunto conexo (A) e de um conjunto desconexo (B) em $\mathbb{R}^2$.

Definimos agora a conectividade em $\mathbb{R}$.

Definição. *Dado $X \subseteq \mathbb{R}$, dois conjuntos abertos $A, B \subset \mathbb{R}$ dizem-se uma desconexão de X se:*
1. $X \cap A$ e $X \cap B$ forem disjuntos e não-vazios;
2. $X \subseteq A \cup B$.

Definição. *Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é conexo se não existir nenhuma desconexão de X. Caso contrário, diz-se que é desconexo.*

Vamos então mostrar que os intervalos em $\mathbb{R}$ são conexos. A implicação recíproca, que os conjuntos conexos são intervalos, é um resultado de demonstração muito simples.

Teorema. *Os intervalos em $\mathbb{R}$ são conexos.*

Demonstração. Vamos demonstrar o resultado por redução ao absurdo. Suponhamos que $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo e que I é desconexo, sendo A, B uma desconexão de I. Para simplificar a notação, definimos $A' = I \cap A$ e $B' = I \cap B$. Como estes conjuntos são não-vazios, escolhemos dois elementos $a_0 \in A'$ e $b_0 \in B'$. Assumimos, sem perda de generalidade, que $a_0 < b_0$ (caso contrário, alteramos os nomes de A e B). Consideremos agora o intervalo $I_0 = [a_0, b_0]$ e tomemos o seu ponto médio $x_0 = (a_0 + b_0)/2$. Sendo I um intervalo, temos $x_0 \in I = A' \cup B'$, pelo que x_0 deve pertencer a A' ou a B', mas não a ambos, porque estes conjuntos são disjuntos.

Definimos agora o intervalo I_1 da seguinte maneira:

$$I_1 = [a_1, b_1] = \begin{cases} [a_0, x_0], & \text{se } x_0 \in B' \\ [x_0, b_0], & \text{se } x_0 \in A'. \end{cases}$$

Por construção, $a_1 \in A'$ e $b_1 \in B'$. Além disso, $I_1 \subset I_0$ e $|a_1 - b_1| = 1/2|a_0 - b_0|$.

Construimos sucessivamente uma família de intervalos de forma análoga, fazendo $x_n = (a_n + b_n)/2$ e definindo os intervalos

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, x_n], & \text{se } x_n \in B' \\ [x_n, b_n], & \text{se } x_n \in A' \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tal como anteriormente, os conjuntos I_n intersectam A' e B'. Temos também a cadeia de inclusões $I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ e sabemos que $|a_n - b_n| = (1/2)^n \, |a_0 - b_0|$. Como $\mathbb{R}$ é completo, esta sequência converge para um conjunto $\{c\}$, ou seja,

$$\exists\, c \in \mathbb{R} : \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \{c\}.$$

Como $c \in I$, c deve pertencer ou a A' ou a B'. Suponhamos que $c \in A'$ (o raciocíno é análogo se $c \in B'$). Como A é um conjunto aberto e $c \in A$, existe um $\epsilon > 0$ tal que $]c - \epsilon, c + \epsilon[\subseteq A$. Também existe um intervalo I_n totalmente contido em $]c - \epsilon, c + \epsilon[$ (o n tem de ser tal que $|a_n - b_n| < \epsilon$, o que é sempre possível encontrar). Então, I_n está totalmente contido em $A' = I \cap A$. Mas isto é absurdo, porque I_n também contém b_n, que está em B' e não em A'. Logo, a nossa suposição inicial era falsa, e I é conexo. $\square$

Apesar de não ser relevante na demonstração, é interessante notar que os conjuntos A e B seriam uma desconexão de todos os I_n, e não só de I (basta mostrar que A e B obedecem aos critérios da definição de desconexão). Neste sentido, os conjuntos I_n "herdam" de I a propriedade de serem desconexos. Este facto está em analogia direta com as provas de compacidade. Nestas, assumimos que o conjunto original X não é compacto e construimos uma sucessão de intervalos que partilham essa propriedade.

A demonstração habitual de que $\mathbb{R}$ (ou um intervalo de $\mathbb{R}$) é conexo não utiliza a bissecção de intervalos. A construção, nesse caso, utiliza o supremo do conjunto $[a_0, b_0] \cap A$. A existência deste supremo, tal como a existência do conjunto-limite $\{c\}$ desta prova, é uma consequência de $\mathbb{R}$ ser completo, pelo que parece ser este o facto crucial, independentemente da forma de completude que usamos.

De facto, de acordo com [3], é conhecida a equivalência entre

- conectividade;
- existência de supremos para intervalos limitados superiormente;
- convergência de sequências de intervalos (cada um contido no anterior).

(Em rigor, para ter equivalência, é preciso juntar a propriedade arquimediana a esta última).

Esta pequena nota foi escrita com a convicção de, apesar de se conhecer a equivalência, não se ter ainda escrito a demonstração explicitamente. A ideia surgiu enquanto frequentava a disciplina de Topologia e Análise Linear do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

REFERÊNCIAS

[1] Raman-Sundström, M. (2015). "A Pedagogical History of Compactness". *The American Mathematical Monthly*, 122(7), 619-635.

[2]Russ, S. B. (1980). *A translation of Bolzano's paper on the intermediate value theorem*. Historia Mathematica, 7(2), 156-185.

[3] Holger Teismann. (2013). "Toward a More Complete List of Completeness Axioms". *The American Mathematical Monthly*, 120(2), 99-114.

SOBRE O AUTOR

Sagar Pratapsi é estudante de Mestrado em Física (ramo de Física Nuclear e de Partículas) da Universidade de Coimbra, tem um forte gosto pela matemática, tendo já participado nalguns projetos, nomeadamente Novos Talentos em Matemática da Fundação Calouste Gulbenkian.