REPRESENTAÇÃO HOLISTA DE NÚMEROS REAIS

Mário Abrantes
Instituto Politécnico de Bragança
mar@ipb.pt

INTRODUÇÃO

Designa-se por *representação híbrida* de números reais qualquer representação de números reais numa dada base b, na forma $\sum_{i=m}^{n} a_i b^i$, com $n \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{Z}$ ou $m = -\infty$, sendo os termos a_i elementos do alfabeto da base b afetados pelos sinais '+' ou '–', ditos *dígitos*, no caso geral, ou, especificamente e por simplicidade, *dígitos positivos* ou *dígitos negativos*, conforme a afetação de sinal.

Como exemplo sugestivo duma representação híbrida de um número real, consideremos o número decimal $1.5 = 1 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1}$. Verifica-se imediatamente a igualdade $1.5 = 2 \times 10^0 + (-5) \times 10^{-1}$, que induz a representação 2.-5 para o número 1.5, na qual o operador '–' que afeta o dígito 5 é unário. Para tornar mais simples a leitura de representações híbridas, usaremos a *notação de Colson* [3] que consiste em denotar cada dígito negativo pelo correspondente dígito positivo encimado por uma barra. Assim, em vez de 2.-5 escrevemos $2.\overline{5}$. Existem várias representações híbridas para o número 1.5, como sejam

$$
\begin{aligned}
1.5 &= 1\overline{8}.\overline{5} = 10 - 8 - 0.5 \\
1.5 &= 1\overline{9}.5 = 10 - 9 + 0.5 \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Veremos adiante que a denotação do número 1.5 segundo a representação holista é $2.\overline{5}$.

As aplicações de representações numéricas híbridas de números inteiros incluem áreas como a arimética computacional, a criptografia e o processamento digital de sinal [4]. Na aritmética computacional, este tipo de representação numérica torna possível implementar somadores que limitam o comprimento das *cadeias de propagação de transporte* (*carry propagation chains*, na terminologia inglesa), o que permite que o tempo gasto na adição de dois números seja independente do número de dígitos envolvidos [5]. Isto é conseguido fazendo com que o valor de qualquer dígito s_i que ocorre na soma de dois números positivos com $n+1$ dígitos, $(x_n \cdots x_2 x_1 x_0) + (y_n \cdots y_2 y_1 y_0)$, dependa apenas dos dígitos x_i, x_{i-1} e y_i, y_{i-1}.

Apresentamos no esquema seguinte a soma de dois números de quatro dígitos, $x = x_3x_2x_1x_0 = 2345$ e $y = y_3y_2y_1y_0 = 7818$, usando um algoritmo de adição que evita a propagação de dígitos de transporte [5].

$$
\begin{array}{rl}
{\scriptstyle c_3c_2c_1c_0} & \\
2\,3\,4\,5 & \\
+\;7\,8\,1\,8 & \\
\hline
1\,1\,0\,1\,0 & \rightarrow \text{dígitos de transporte} \\
\overline{1}\,\overline{9}\,5\,\overline{7} & \rightarrow \text{somas de dígitos por coluna} \\
\hline
1\,0\,\overline{9}\,6\,\overline{7} & \rightarrow \text{resultado}
\end{array}
$$

Na linha *dígitos de transporte* está colocado, por coluna c_i, o dígito de transporte t_i da coluna anterior, sendo $t_i = 1$ se $x_{i-1} + y_{i-1} \geq 9$ e $t_i = 0$ se $x_{i-1} + y_{i-1} < 9$. Tomando como exemplo a coluna c_2, temos que o dígito de transporte a colocar na coluna c_3 é $t_3 = 1$, porque $x_2 + y_2 = 3 + 8 = 11$. Na linha *somas de dígitos por coluna* está colocado, por coluna c_i, o simétrico do complemento para 10 do dígito menos significativo da soma $x_i + y_i$, se $x_i + y_i \geq 9$, ou o dígito correspondente à soma no caso de ser $x_i + y_i < 9$. Tomando como exemplo a coluna c_3, temos $x_3 + y_3 = 3 + 8 = 11$, pelo que o dígito a colocar é $-(10-1) = \overline{1}$. Na linha *resultado*, está colocada a soma dos números nas linhas *dígitos de transporte* e *somas de dígitos por coluna*, sendo que uma soma de dígitos do tipo $a + \overline{b}$ deve ser interpretada como $a - b$, se $a \geq b$, ou $\overline{b - a}$, se $b > a$. No resultado final, $10\overline{9}6\overline{7}$, os dígitos com barra revertem para os correspondentes valores positivos, $\overline{9} \rightarrow 1$ e $\overline{7} \rightarrow 3$, obtendo-se 10163.

O leitor pode apreciar este esquema e verificar que para conhecer o resultado em cada coluna são necessários apenas os dígitos de cada operando nessa coluna e na coluna anterior. Esta virtude permite calcular em paralelo os dígitos do resultado, tornando o tempo de cálculo independente do número de dígitos dos operandos e do número de transportes verificados.

No restante deste artigo apresentamos a representação holista de números reais. Designamos por *forma holista* de

O propósito deste artigo é a definição e a caracterização de uma certa representação híbrida de números reais, aqui designada por *representação holista*, salientando-se um conjunto de propriedades que a tornam interessante na classe das representações híbridas *equiponderadas* apresentada no texto.

um número real r a sua denotação segundo a representação holista, que abreviaremos por h_r ou $h(r)$, conforme a conveniência. Representa-se pelo símbolo $\mathbb{H}$ o conjunto das formas holistas obtidas para todos os números reais. A representação holista tem as propriedades seguintes: (i) estabelece uma relação biunívoca entre o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e o conjunto das formas holistas $\mathbb{H}$; (ii) é uma representação equiponderada (ver definição 2); (iii) de entre todas as representações híbridas equiponderadas de números reais positivos (respetivamente negativos), nenhuma utiliza mais dígitos negativos (respetivamente positivos) do que a representação holista; (iv) não existem zeros entre quaisquer dois dígitos não nulos da forma holista h_r de um número real r.

A representação holista e as suas propriedades vão ser definidas para números na base 10, por comodidade, mas são estendíveis a qualquer outra base inteira de numeração.

REPRESENTAÇÃO HOLISTA

Vamos definir representação holista. Comecemos com um exemplo prévio. Seja o número real $r = 19.945$. A forma holista deste número constrói-se nos passos seguintes:

1. Adicionar 1 ao dígito mais significativo. Obtém-se 29.945;
2. Substituir o número formado pelos restantes dígitos, 9.945, pelo seu complemento para 10, 0.055, afetando pelo sinal '–' cada dígito não nulo deste complemento. Obtém-se $20.0\overline{5}\overline{5}$. Designamos esta forma por h'_r;
3. Eliminar os zeros de h'_r, substituindo o par $0\overline{5}$ por $\overline{1}5$, do que resulta a sequência de símbolos $20.\overline{1}5\overline{5}$, e depois o par $0\overline{1}$ por $\overline{1}9$, obtendo-se $2\overline{1}.95\overline{5}$. A forma obtida $h_r = 2\overline{1}.95\overline{5}$ é a forma holista de r. Note-se que não existem zeros entre cada dois dígitos não nulos de h_r.

Definição 1. (Representação Holista). Seja r um número real, $sinal(r)$ o sinal de r e $r = sinal(r) r_n r_{n-1} \cdots r_0.r_{-1} r_{-2} \cdots$ a representação decimal mais curta possível de r[1], com $r_n \neq 0$. Diz-se *representação holista* de r a forma decimal $h_r = a_n a_{n-1} \cdots a_0.a_{-1} a_{-2} \cdots$, com $a_n \neq 0$, calculada do modo que se segue.

1. Se r é um inteiro não negativo, $0 \leq r \leq 9$, então $h_r = r$;
2. Se $r > 0$ e $r \notin \{1, 2, \cdots, 9\}$, então:
   a. Fazer
   $$h'_r = (r_n + 1) \times 10^n + (10^n - r_{n-1} \cdots r_0.r_{-1} r_{-2} \cdots)_c$$
   sendo $(10^n - r_{n-1} \cdots r_0.r_{-1} r_{-2} \cdots)_c$ a sequência de símbolos que se obtém afetando com o operador unário '–' todos os dígitos não nulos do complemento para 10 do número $r_{n-1} \cdots r_0.r_{-1} r_{-2} \cdots$;
   b. Fazer *substituições de Colson* [3] que consistem em substituir em h'_r, sucessivamente, todos os pares de dígitos consecutivos do tipo $0\overline{d}$, $d > 0$, por $\overline{1}d'$, com $d' = 10 - d$, até se obter uma representação sem pares do tipo $0\overline{d}$. Seja h''_r a sequência de símbolos resultante;
   c. Se os dois dígitos mais significativos de h''_r forem $1\overline{1}$, então substituí-los pelo dígito 9. O número resultante é a representação holista h_r de r.
3. Se $r < 0$, então tomamos $-r$ e procedemos como nos itens 1, 2 anteriores, sendo h_r a representação que se obtém trocando o sinal de cada dígito da sequência final obtida.

Exemplo 1. Consideremos alguns exemplos. Seja $r = 9.91$. Calcula-se h_r a partir de $h'_r = (9+1) \times 10^0 - (10^0 - 0.91) = 10.0\overline{9}$ nos seguintes passos: substitui-se o par de dígitos $0\overline{9}$ por $\overline{1}1$, obtendo-se $10.\overline{1}1$; substitui-se em $10.\overline{1}1$ o par de dígitos $0\overline{1}$ por $\overline{1}9$, obtendo-se $h''_r = 1\overline{1}.91$; finalmente substitui-se em $1\overline{1}.91$ o par de dígitos $1\overline{1}$ por 9, "encurtando" a parte inteira de h''_r, obtendo-se $h_r = 9.91$. Assim, obtemos sucessivamente

$$r = 9.91, \quad h'_r = 10.0\overline{9}, \quad h''_r = 1\overline{1}.91, \quad h_r = 9.91.$$

De modo análogo temos,

$$r = 900, \quad h'_r = 1\overline{1}00, \quad h''_r = 1\overline{1}00, \quad h_r = 900;$$
$$r = -19.91, \quad h'_r = 20.0\overline{9}, h''_r = 2\overline{1}.91, \quad h_r = \overline{2}1.\overline{9}\,\overline{1}.$$

Uma das consequências do Teorema 1 apresentado adiante é que no processo referido no item 2b. da definição anterior a ordem pela qual são eliminados os pares $0\overline{d}$ não altera a forma h''_r obtida.

PROPRIEDADES DA REPRESENTAÇÃO HOLISTA

A proposição seguinte é uma caracterização da forma holista dos números reais.

Proposição 1. *A forma holista $h_r = a_n a_{n-1} \cdots a_0.a_{-1} a_{-2} \cdots$ de um número real r não negativo tem as seguintes propriedades:*

1. h_r não tem dois dígitos positivos consecutivos $d_1 d_2$ com $d_1 \neq 9$;
2. h_r não tem dois símbolos consecutivos do tipo $\overline{d_1} d_2$ com $d_1 \neq 1$;

3. As sequências de dígitos consecutivos situados entre dois quaisquer dígitos não nulos de h_r, não contêm nenhum dígito nulo.

Se h_r é um número negativo, então estas propriedades são verificadas por $-h_r$, que se obtém trocando o sinal a cada dígito de h_r.

Prova.

1. Os dígitos do número $h'_r = (r_n + 1) \times 10^n + (10^n - r_{n-1} \cdots r_0.r_{-1}r_{-2} \cdots)_c$ (ver item 2a. da definição 1) são, à exceção do dígito mais significativo, negativos ou nulos. Os dígitos positivos do número h_r correspondente, para além do dígito mais significativo, são produzidos pelas substituições de Colson indicadas no item 2b. da definição 1, as quais trocam cada par consecutivo de dígitos do tipo $0\overline{d}$, $d > 0$, por um par de dígitos na forma $\overline{1}d'$, $d' = 10 - d > 0$. Por aplicação de substituições de Colson, as únicas formas de obter um dígito positivo à esquerda de $d' > 0$ são: (i) existir um zero à esquerda de $\overline{1}d'$, sendo a sequência $0\overline{1}d'$ substituída por $\overline{1}9d'$; (ii) o dígito mais significativo do número h'_r ser 1 e estar à esquerda do par $\overline{1}d'$, caso em que a sequência $1\overline{1}d'$ é substituída por $9d'$ (cf. item 2c. da definição 1). Este argumento prova o item 1 da proposição.

2. Como se referiu no item anterior, os dígitos positivos de h_r à direita do seu dígito mais significativo são produzidos pelas substituições de Colson, que não geram pares de dígitos consecutivos do tipo $\overline{d_1}d_2$, $d_1, d_2 > 0$, com $d_1 \neq 1$. Este argumento prova o ponto 2 da proposição.

3. Qualquer dígito nulo situado entre dois quaisquer dígitos não nulos de h_r, teria de 'sobreviver' à transformação de r em h_r descrita no item 2b. da definição 1. Mas qualquer sequência de zeros situada entre dois dígitos não nulos de h'_r, tem um dígito negativo à sua direita, o que permite a aplicação de uma substituição de Colson, eliminando um zero da sequência. Qualquer sequência de zeros remanescente mantém ainda um dígito negativo à sua direita, o que permite aplicar nova substituição de Colson. Por consequência, não pode existir nenhuma posição $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a_k \neq 0$ e exista algum dígito nulo na subsequência de dígitos $a_n \cdots a_k$ de h_r. Este argumento prova o item 3 da proposição. □

No que se segue, mostraremos que a cada número real r corresponde uma, e uma só, forma holista, sendo esta uma propriedade distintiva desta representação híbrida.

Definição 2. *(Representação equiponderada).* Dizemos que uma representação híbrida de números reais é *equiponderada* se, e somente se, cada número real r e a correspondente forma híbrida γ_r, têm: (a) os dígitos mais e menos significativos nas mesmas posições em relação ao ponto decimal, no caso de r ter dízima finita; (b) os dígitos mais significativos nas mesmas posições em relação ao ponto decimal, e as dízimas infinitas, no caso de r ter dízima infinita.

Proposição 2. *A representação holista é equiponderada.*

Prova. Seja r um número real. Se a dízima de r for finita, a definição 1 diz-nos que o dígito menos significativo de h''_r tem o mesmo peso que os dígitos menos significativos de r e de h_r. No item 2a. da definição 1, verifica-se que se houver transporte na soma $(r_n + 1)$, então os dois dígitos mais significativos de h'_r são 10, depois transformados em $1\overline{1}$ em h''_r, no item 2b., e finalmente transformados em 9 no item 2c. Portanto, havendo ou não transporte, os dígitos mas significativos de h_r e de r têm o mesmo peso. Se a dízima de r for infinita, então a dízima de h_r também é infinita, pela definição 1. □

Proposição 3. *Sejam* $u = (a_n a_{n-1} \cdots) \times 10^q$ e $v = (b_n b_{n-1} \cdots) \times 10^q$, com $q, n \in \mathbb{Z}$, duas representações equiponderadas o mais curtas possível (cf. nota de rodapé 1) de um mesmo número real r, com dígitos diferentes em, pelo menos, uma posição $p \leq n$. Para qualquer k inteiro, $k \leq n$, verifica-se $|a_n a_{n-1} \cdots a_k - b_n b_{n-1} \cdots b_k| = 0$ ou $|a_n a_{n-1} \cdots a_k - b_n b_{n-1} \cdots b_k| = 1$.

Prova. Dado ser $|0.a_{k-1}a_{k-2} \cdots - 0.b_{k-1}b_{k-2} \cdots| < 2$, uma vez que nenhuma destas dízimas pode ser dos tipos $0.99 \cdots$ ou $0.\overline{99} \cdots$ (cf. nota de rodapé 1), então também deve ser $|a_n a_{n-1} \cdots a_k - b_n b_{n-1} \cdots b_k| = 0$ ou $|a_n a_{n-1} \cdots a_k - b_n b_{n-1} \cdots b_k| = 1$, uma vez que se o módulo nestas igualdades for diferente de 0 ou de 1, deverá ser maior ou igual a 2, não podendo nesse caso ser compensado pelo valor de $|0.a_{k-1}a_{k-2} \cdots - 0.b_{k-1}b_{k-2} \cdots|$, de modo a termos $u = v$. □

[1] Por representação decimal mais curta possível, quer dizer-se que em vez das representações terminadas por uma sequência infinita de 9s, $\pm \cdots r_n r_{n-1} \cdots r_k 99 \cdots$, com $r_k \neq 9$, escreveremos $\pm \cdots r_n r_{n-1} \cdots r'_k$, com $r'_k = r_k + 1$. No que se segue, supõe-se cada número real r representado sempre na forma decimal mais curta possível.

O resultado seguinte garante que a cada número real corresponde uma, e uma só, forma holista, mostrando que a Definição 1 estabelece uma relação biunívova entre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e o conjunto $\mathbb{H}$ das formas holistas.

Teorema 1. *A representação holista define uma relação funcional bijetiva $h : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$.*

Prova. A série que representa a forma holista, $h_r = \sum_{k=-\infty}^{n} a_k \times 10^k$, na qual os dígitos da forma $a_k = \overline{d}$ são substituídos por $-d$, é uma série absolutamente convergente. Daqui resulta que a cada forma holista corresponde um só número real, que é a soma da série. Mostremos agora, por redução ao absurdo, que, no sentido inverso, a cada número real r corresponde uma só forma holista h_r. Sejam $h^* = a_n a_{n-1} \cdots$ e $h^{**} = b_n b_{n-1} \cdots$ duas representações holistas do mesmo número real r (para efeito desta demonstração, não consideramos os eventuais pontos decimais). Suponhamos então, por hipótese, que h^* e h^{**} são diferentes em algum dígito. Seja p o maior inteiro para o qual se verifica $a_p \neq b_p$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $a_p > b_p$. Fazendo

$$h^* = \sum_{i=p+1}^{n} a_i 10^i + a_p 10^p + h_o^*$$

$$h^{**} = \sum_{i=p+1}^{n} b_i 10^i + b_p 10^p + h_o^{**}$$

em que h_o^* e h_o^{**} representam os restos das respetivas séries, obtemos

$$\begin{aligned} r = h^* = h^{**} &\Leftrightarrow h^* - h^{**} = 0 \\ &\Leftrightarrow (a_p - b_p)10^p + h_o^* - h_o^{**} = 0 \\ &\Leftrightarrow (a_p - b_p)10^p = h_o^{**} - h_o^*, \end{aligned}$$

Verifica-se imediatamente que a_p e b_p devem ter o mesmo sinal porque, de contrário, seria $|a_n a_{n-1} \cdots a_p - b_n b_{n-1} \cdots b_p| > 1$, dado que, por hipótese, $a_i = b_i$, para $p+1 \leq i \leq n$. Isto impede a igualdade $h^* = h^{**}$, de acordo com a Proposição 3. Segundo esta proposição, devemos ter $|a_n a_{n-1} \cdots a_p - b_n b_{n-1} \cdots b_p| = 1$. Como estamos a supor $a_p > b_p$, então deve ser $a_n a_{n-1} \cdots a_p - b_n b_{n-1} \cdots b_p = 1$, diferença esta que só permite $h^* = h^{**}$ se for $h_o^* < 0$ e $h_o^{**} > 0$. Isto implica ser $a_{p-1} < 0$ e $b_{p-1} > 0$. Mas esta conclusão levanta uma contradição: se for $b_p > 0$, então deve ser $b_p = 9$ pelo item 1 da Proposição 1, o que contraria a hipótese de ser $a_p > b_p$, uma vez que a_p e b_p têm o mesmo sinal; se for $b_p < 0$, então deve ser $b_p = -1$ pelo item 2 da proposição 1, o que contraria a hipótese de ser $a_p > b_p$, uma vez que a_p e b_p têm o mesmo sinal. Como consequência, não existe nenhum inteiro p para o qual seja $a_p \neq b_p$, pelo que as representações holistas h^* e h^{**} são, dígito a dígito, iguais. □

Proposição 4. *Seja $h_r = a_n a_{n-1} \cdots$ a forma holista de um número real r positivo, e $\gamma_r = b_n b_{n-1} \cdots$ uma forma híbrida equiponderada qualquer de r (ignorando eventuais pontos decimais). Se existe uma posição k tal que $b_k < 0$ e $a_k > 0$, então:*

1. *Ou $a_{k+1} = -1$ e $b_{k+1} = 0$;*
2. *Ou então existe em h_r uma sequência $a_{k+p} a_{k+p-1} \cdots a_{k+1} a_k = \overline{1}99 \cdots 9 a_k$, a que corresponde em γ_r a sequência $b_{k+p} b_{k+p-1} \cdots b_{k+1} b_k = 00 \cdots 0 b_k$.*

Prova. Seja então $h_r = a_n a_{n-1} \cdots$, $\gamma_r = b_n b_{n-1} \cdots$, com $b_k < 0$ e $a_k > 0$. Vale o seguinte argumento.

1. Se $a_{k+1} > 0$, então $a_{k+1} = 9$, pelo item 1 da proposição 1. Analogamente, se $a_{k+2} > 0$, então deve ser $a_{k+2} = 9$. Como $\gamma_r = h_r$ e $a_k a_{k-1} \cdots > b_k b_{k-1} \cdots$, para alguma posição $k+p$ deve ser $a_{k+p} < 0$. Pelo item 2 da proposição 1, deve ser $a_{k+p} = -1$, e portanto $a_{k+p} a_{k+p-1} \cdots a_{k+1} a_k = \overline{1}99 \cdots 9 a_k$. Se $a_{k+1} < 0$, então $a_{k+1} = -1$, pelo item 2 da proposição 1. Mostramos assim que os tipos de sequências de dígitos à esquerda de a_k na forma h_r, são conforme enunciado na proposição. Vamos agora verificar o que aí é dito a respeito das sequências de dígitos à esquerda de b_k na forma γ_r.
2. Consideremos o caso em que $a_{k+1} = -1$ e $a_k - b_k = 10 + d > 10$, com $0 \leq d \leq 9$. Temos (a menos da ponderação devida a eventuais pontos decimais nas representações),
$$\begin{aligned} h_r - \gamma_r &= (a_n \cdots a_{k+1} - b_n \cdots b_{k+1}) \times 10^{k+1} + \\ &\quad + (a_k - b_k) \times 10^k + h_r^* - \gamma_r^* \\ &= (a_n \cdots a_{k+1} - b_n \cdots b_{k+1}) \times 10^{k+1} + \\ &\quad + 10^{k+1} + d \times 10^k + h_r^* - \gamma_r^* \end{aligned}$$
sendo h_r^*, γ_r^* os restos das séries respetivas. Nesta última igualdade deve ser $a_n \cdots a_{k+1} - b_n \cdots b_{k+1} = -1$, para compensar a parcela 10^{k+1}. Dado ser $a_{k+1} = -1$ e $a_n \cdots a_{k+1} - b_n \cdots b_{k+1} = (a_n \cdots a_{k+2} - b_n \cdots b_{k+2}) \times 10 + (a_{k+1} - b_{k+1})$, então deve ser $a_n \cdots a_{k+2} - b_n \cdots b_{k+2} = 0$ e $b_{k+1} = 0$[2].
3. Seja agora o caso $a_{k+1} = -1$ e $a_k - b_k = d < 10$, com $2 \leq d \leq 9$. Temos

$$
\begin{aligned}
h_r - \gamma_r &= (a_n \cdots a_{k+1} - b_n \cdots b_{k+1}) \times 10^{k+1} + \\
&+ (a_k - b_k) \times 10^k + h_r^* - \gamma_r^* \\
&= (a_n \cdots a_{k+1} - b_n \cdots b_{k+1}) \times 10^{k+1} + \\
&+ d \times 10^k + h_r^* - \gamma_r^*
\end{aligned}
$$

sendo h_r^*, γ_r^* os restos das séries respetivas. Se for $2 \leq d \leq 8$, então $h_r \neq \gamma_r$, já que o valor de d não pode ser compensado pelo valor da expressão $h_r^* - \gamma_r^*$. Então deve ser $d = 9$, o que implica ser também $a_n \cdots a_{k+1} - b_n \cdots b_{k+1} = -1$, de modo a obtermos $(a_n \cdots a_{k+1} - b_n \cdots b_{k+1}) \times 10 + d = -1$, compensável por $h_r^* - \gamma_r^*$. Da mesma forma que no item anterior, isto implica $b_{k+1} = 0$.

4. Resta mostrar que se for $a_{k+p}a_{k+p-1} \cdots a_{k+1}a_k = \bar{1}99 \cdots 9a_k$, então temos $b_{k+p}b_{k+p-1} \cdots b_{k+1}b_k = 00 \cdots 0b_k$. Como $\bar{1}99 \cdots 9a_k = \bar{1}a_k$, então deve ser $b_{k+1} = 0$, pelo que foi estabelecido nos itens anteriores. Por outro lado, se para alguma posição $k + 2 \leq i \leq k + p$ for $b_i = \alpha \neq 0$, fazendo $D = a_{k+p}a_{k+p-1} \cdots a_{k+1} - b_{k+p}b_{k+p-1} \cdots b_{k+1}$, e por ser $|a_{k+p}a_{k+p-1} \cdots a_{k+1}| = 1$ e $|b_{k+p}b_{k+p-1} \cdots b_{k+1}| \geq 10|\alpha|$, temos $|D| \geq 2$, pelo que D não pode ser compensado por $a_n \cdots a_{k+p+1} - b_n \cdots b_{k+p+1}$, e por isso $h_r \neq \gamma_r$. Não pode pois ser o caso de, para alguma posição $k + 1 \leq i \leq k + p$, se ter $b_i \neq 0$.

O teorema seguinte exibe uma propriedade que distingue a representação holista entre todas as representações híbridas equiponderadas de números reais.

Teorema 2. *De entre todas as formas produzidas por representações híbridas equiponderadas de um número real positivo (respetivamente negativo) r, nenhuma tem mais dígitos negativos (respetivamente positivos) do que a forma holista h_r.*

Prova. Esta demonstração é imediata, uma vez que a Proposição 4 afirma que, dada a representação holista $h_r = a_n \cdots a_k \cdots$ e uma outra representação híbrida equiponderada $\gamma_r = b_n \cdots b_k \cdots$ de um número real $r > 0$, se para alguma posição $k < n$ se tem $a_k > 0$ e $b_k < 0$, então existe uma sequência de dígitos $a_{k+p} \cdots a_{k+1}$, em h_r, com $p \geq 1$, contendo um dígito negativo, ao passo que a sequência homóloga $b_{k+p} \cdots b_{k+1}$, em γ_r não contém dígitos negativos. Logo γ_r não pode ter mais dígitos negativos do que h_r. Disto resulta que se for $r < 0$, então $-\gamma_r$ não pode ter mais dígitos negativos do que $-h_r$, pelo que γ_r não pode ter mais dígitos positivos do que h_r (notar que o simétrico duma forma se obtém trocando os sinais dos dígitos da mesma). $\square$

REPRESENTAÇÕES HÍBRIDAS USUAIS

Existem na literatura várias propostas para representar números reais usando dígitos com sinal positivo ou negativo. Uma delas é devida a John Colson [3], quinto professor lucasiano na Universidade de Cambridge. Colson propõe que cada um dos dígitos $d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ da representação decimal usual de números reais possa ser substituído pela sequência $1\bar{d} = 1 \times 10 - (10 - d)$, de uma forma não determinista. Substituições deste tipo, que atrás designámos por *substituições de Colson*, produzem formas múltiplas para cada número real. Por exemplo, $121 = 2\bar{8}1 = 1\bar{9}21$. De todas as denotações possíveis resultantes para cada número real, Colson usa, no entanto, a que resulta de uma transformação por ele designada *Redução aos Menores Dígitos (Reduction to Small Figures*, no original), em que se transforma cada número decimal positivo fazendo substituições de Colson apenas nos dígitos 'grandes' {6,7,8,9}. Por exemplo, de 98736 obtém-se sucessivamente, do dígito menos significativo para o mais significativo, $9874\bar{4}$, $993\bar{4}\bar{4}$, $10\bar{1}3\bar{4}\bar{4}$, sendo esta última a *reduzida aos menores dígitos* do número 98736. Usando os números nesta notação, as operações aritméticas de adição e multiplicação, por envolverem apenas números formados com os dígitos mais pequenos, e com ambos os sinais, $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$, promovem uma menor quantidade de operações de transporte, efetuando-se por isso de forma mais expedita. Propostas semelhantes foram apresentadas por A. Cauchy [2], E. Selling e W. Ford [1].

Outras propostas podem ser mencionadas, como a representação na *Forma Não Adjacente*[3], que utiliza a base 2 e dígitos com os valores {-1, 0, 1}, produzindo números que exibem, pelo menos, um zero entre cada dois dígitos não nulos. Outro tipo de representação com dígitos positivos e negativos é a notação na *forma balanceada*[4] que, para cada base b, representa os números usando o alfabeto $\{-k, \cdots, (b-1) - k\}$ sendo geralmente $k = \lfloor b/2 \rfloor$. Nesta última família de representações, tem especial interesse a representação *balanceada ternária*, que usa o alfabeto {-1, 0, 1}, adotada como representação numérica interna da clas-

[2] Deve ser também $d = 0$ ou $d = 1$, de modo a que o valor de d possa ser compensado pelo valor da expressão $h_r^* - \gamma_r^*$, para se obter $h_r = \gamma_r$.

[3] Ver *https://en.wikipedia.org/wiki/Non-adjacent_form*.

[4] Ver *https://en.wikipedia.org/wiki/Signed-digit_representation*.

se de computadores russos *Setun*, desenvolvidos nos anos 50 e 60 do séc. XX.[5]

UM PROBLEMA PARA O LEITOR

Existe uma representação híbrida equiponderada, designemo-la por ω, interessante pela propriedade seguinte. Sejam r um número real qualquer, ω_r a forma de r nesta representação, e ω_r^-, ω_r^+ os módulos dos valores das partes negativa e positiva de ω_r (e.g. se for $\omega_r = 1.\bar{2}9$, então $\omega_r^- = 0.2, \omega_r^+ = 1.09$). Para toda a forma híbrida equiponderada γ_r de r, verifica-se:

$$\omega_r^- \geq \gamma_r^-$$
$$\omega_r^+ \geq \gamma_r^+.$$

Deixamos ao leitor o desafio de definir esta representação.

AGRADECIMENTO

O autor agradece o trabalho de revisão deste artigo, que concorreu para melhorar a clareza e a correção do mesmo.

REFERÊNCIAS

[1] Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations*, Dover Publications, 1993. p. 57.

[2] Augustin-Louis Cauchy, *Sur les Moyens d'Éviter les Erreurs dans les Calculs Numériques*, Comptes Rendus 1840, 11:789.

[3] John Colson, *A Short Account of Negativo-Affirmative Arithmetick*, Philosophical Transactions of the Royal Society 1726 34:161–73.

[4] Ebeid, N., M. and Hasan, M., A. *On binary signed digit representations of integers*, Des. Codes Cryptography, Vol. 42, No. 1, 2007.

[5] Koren, I., *Computer Arithmetic Algorithms*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1993.

[6] Phatak, D. S. and Koren, I., *Hybrid Signed-Digit Number Systems: A Unified Framework for Redundant Number Representations with Bounded Carry Propagation Chains*, IEEE Trans. Comput., Vol. 43, No. 8, 1994,pp. 880-891.

SOBRE O AUTOR

Mário Abrantes, doutorado pela Universidade Nova de Lisboa, é professor de Matemática no Instituto Politécnico de Bragança.

[5] Ver *https://en.wikipedia.org/wiki/Setun*.