AMÍLCAR BRANQUINHO
Universidade de Coimbra
ajplb@mat.uc.pt

UMA HISTÓRIA INTERMINÁVEL...

Caro Leitor, os discursos, as relações pessoais, as funções oscilantes, as aulas, os anúncios... tudo isto e muito mais se deteriora pelo corrosivo efeito da monotonia! Não nos enganemos, também no estudo da matemática há momentos em que tudo parece igual, e em que se necessita de um sopro de inspiração.

Contar é uma atividade básica que esteve presente desde os alvores da humanidade, fazendo parte dos temas de estudo de uma área da matemática, rica em questões complexas de enunciado simples, a Combinatória. Esta é inseparável da própria noção de número natural e está estreitamente ligada à Teoria de Números. Já a Teoria Analítica dos Números, depois de 150 anos de história (bastante mais, se considerarmos as contribuições de L. Euler), pode considerar-se um ente estranho. Se os números naturais ou os inteiros formam um conjunto discreto, podemos perguntar-nos:

Porquê a análise com números?

O termo análise procede de uma palavra grega que, entre outras coisas, significa decomposição. Mais do que o significado comummente aceite em matemática, relacionado com derivadas e integrais, vamos aqui concentrar-nos no seu sentido etimológico.

Naturalmente, esta questão não tem uma resposta fácil e compreendê-la requer um certo nível de conhecimento matemático. Além de que os matemáticos têm, em geral, um problema com a divulgação: não sabem mentir!

De facto, a matemática moderna está firme e bem assente no rigor. Mas esta virtude, por vezes, torna-se excessiva quando nos separamos do âmbito da investigação ou de um público constituído por colegas.

Aqui, temos como propósito ilustrar alguns aspetos da Análise, mostrando com exemplos e eliminando o fardo dos pontos mais técnicos, como as médias de funções, *à la mode de Newton*, fazem parte da maravilhosa aventura do Cálculo.

INTEGRAL *VERSUS* MÉDIA.

Em qualquer curso introdutório de Cálculo pode encontrar-se que o integral é uma área, e durante algumas aulas ensinam-se somas inferiores e superiores *à Riemann*... para depois, não sem algum trabalho, demonstrar que

$$\int_0^1 t = \frac{1}{2}\,.$$

Este resultado é natural! A área do triângulo é dada por $b \times {}^{a}/_{2} = 1 \times {}^{1}/_{2}$. Posteriormente, e já munidos do super teorema fundamental do Cálculo, deduzimos que

$$\int_0^x t^k = \frac{x^{k+1}}{k+1}\,,\ k \in \mathbb{R}^+\,. \tag{1}$$

A partir daqui, as somas de Riemann como que se esvaecem do Cálculo.

Haverá alguma justificação natural para a identidade (1)?

O que se segue é uma tentativa de explicar este resultado usando Teoria de Probabilidades (cf. J. Bernoulli, "Ars Conjectandi" e H. Dörrie, "100 Great Problems of Elementary Mathematics", pág. 40-44):

> *Dados sequencialmente três números x,y,z em [0,1], qual é a probabilidade de que o primeiro seja o maior?*

Da simetria do problema concluímos que será $1/3$.

> *E, se conhecermos x, qual é a probabilidade de que y (respetivamente, z) seja menor do que x?*

Deverá ser x, pois, a probabilidade de que um número em [0,1] esteja em $[0, 1/2[$ é $1/2$, de que pertença a $[0, 1/3[$ é $1/3$ e de que esteja em $[0, x[$ é x. Assim, podemos concluir que a resposta à questão inicial é dada por x^2. Somando (integrando) entre todos os possíveis valores de x deduzimos que

$$\int_0^1 t^2 = \frac{1}{3} \quad \text{e também} \quad \int_0^x t^2 = \frac{x^3}{3}$$

(para a última identidade basta considerar uma mudança de escala). Iterando o processo, e considerando $k+1$ números em vez dos três anteriores, obtemos (1), como uma primeira versão da lei dos grandes números.

Quando k não é um inteiro positivo... Começamos por definir o operador valor médio de f em $[0, x[$, como

$$\overset{x}{\underset{0}{\mathfrak{M}}} f = \lim_{n\to\infty} \mu(n)\,, \quad \mu(n) = \frac{f(\delta) + \cdots + f(n\delta)}{n}\,,$$

com $\delta = x/n$. Note-se que, se f é integrável em $[0, x[$,

$$\overset{x}{\underset{0}{\mathfrak{M}}} f = \frac{1}{x}\int_0^x f\,. \tag{2}$$

Assim, tomando $f(t) = t^k$, temos

$$\mu(n) = x^k \left(1^k + \cdots + n^k\right)/n^{k+1}\,.$$

Por exemplo, para $k = 1$, $\mu(n)$ é facilmente determinado. Para tal, basta aplicar a famosa ideia de um jovem C.F. Gauss:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n \\ n & + & n-1 & + & \cdots & + & 1 \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) \end{array}$$

logo, $\mu(n) = x\,(1 + \cdots + n)/n^2 = x\,(n+1)/(2n)$ pelo que, $\overset{x}{\underset{0}{\mathfrak{M}}} t = x/2\,.$

Vejamos como proceder, em geral, para estimar $s(n) = 1^k + \cdots + n^k$. Como consequência da desigualdade de Cauchy (cf. *Gazeta de Matemática*, 168, pág. 9) temos que

$$x^\nu < 1 + \nu\,(x-1)\,,\ x > 0\,,\ 0 < \nu < 1\,;$$

e tomando $\nu = 1/\kappa$ e $1 + \nu\,(x-1) = y$ obtemos

$$y^\kappa > 1 + \kappa\,(y-1)\,,\ y > 0\,,\ \kappa > 1\,. \tag{3}$$

Assim, substituindo, em (3), y sucessivamente por $\vartheta/V > 1$ e por V/ϑ, obtemos

$$\mu\, V^{\kappa-1} < \frac{\vartheta^\kappa - V^\kappa}{\vartheta - V} < \kappa\,\vartheta^{\kappa-1}\,, \tag{4}$$

pelo que tomando sucessivamente $(\vartheta, V) = (j, j-1)$, $j = 1, \ldots, n$, $\kappa = k+1$ e somando,

$$\begin{array}{c} 0 < 1^{k+1} < (k+1)\,1^k \\ (k+1)\,1^k < 2^{k+1} - 1^{k+1} < (k+1)\,2^k \\ \vdots \\ (k+1)\,(n-1)^k < n^{k+1} - (n-1)^{k+1} < (k+1)\,n^k \\ \hline (k+1)\,(s(n) - n^k) < n^{k+1} < (k+1)\,s(n) \end{array}$$

pelo que

$$\frac{1}{k+1} < \frac{s(n)}{n^{k+1}} < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ k > 0\,.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \quad \text{logo} \quad \overset{x}{\underset{0}{\mathfrak{M}}} t^k = \frac{x^k}{k+1}\,, \tag{5}$$

e, tendo em atenção (2), obtemos (1).

UM LIMITE NOTÁVEL

No tratado *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, I. Newton apresenta um estudo sobre a representação em série de potências das funções exponencial, seno, cosseno, logaritmo, binomial... Nesse estudo assume particular importância a média de cada uma das funções indicadas. O que pretendemos fazer é discutir as ideias principais deste estudo, ilustrando-o para a função exponencial.

Comecemos por estabelecer uma desigualdade análoga à anteriormente deduzida para a função potência (4), agora para a função exponencial,

$$e^V < \frac{e^\vartheta - e^V}{\vartheta - V} < e^\vartheta\,,\ \ \vartheta > V\,. \tag{6}$$

De facto, a função exponencial satisfaz a seguinte desigualdade:

$$e^u > 1 + u\,,\ \ u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,. \tag{7}$$

Tome-se agora $\vartheta = V + \varphi > V$, faça-se em (7) $u = \varphi$ (respetivamente, $u = -\varphi$), e, multiplique-se cada uma das expressões por e^V (respetivamente, e^ϑ), obtendo-se $e^\vartheta > e^V + \varphi\, e^V$ (respetivamente, $e^V > e^\vartheta - \varphi\, e^\vartheta$), de onde se conclui (6).

Agora, tendo em atenção (6), concluímos que

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{e^x - e^\alpha}{x - \alpha} = e^\alpha\,, \ \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

UMA REPRESENTAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL.

Por definição, a média da função exponencial em $[0, x[$ é o limite quando $n \to \infty$ de

$$\mu(n) = \frac{e^\delta + e^{2\delta} + \cdots + e^{n\delta}}{n}\,, \quad \delta = \frac{x}{n}\,;$$

tomando sucessivamente $(\vartheta, V) = (j\,\delta, (j-1)\,\delta)$, $j = 1, \ldots, n$ em (6), i.e.

$$\begin{gathered} \delta < e^\delta - 1 < \delta\, e^\delta \\ \delta\, e^\delta < e^{2\delta} - e^\delta < \delta\, e^{2\delta} \\ \vdots \\ \delta\, e^{(n-1)\delta} < e^{n\delta} - e^{(n-1)\delta} < \delta\, e^{n\delta} \end{gathered}$$

somando, efetuando pequenas simplificações, temos

$$\frac{e^x - 1}{x} < \mu(n) < \frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^x - 1}{n}\,, \ x > 0\,,$$

$$\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^x - 1}{n} < \mu(n) < \frac{e^x - 1}{x}\,, \ x < 0\,,$$

pelo que

$$\mathop{\mathfrak{M}}_0^x e^t = \frac{e^x - 1}{x}\,, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

A média herda do integral propriedades importantes como a linearidade, a monotonia e um teorema do valor médio:

Sejam f, g funções positivas e integráveis em [0, x[; então

$$(\inf f) \mathop{\mathfrak{M}}_0^x g \leq \mathop{\mathfrak{M}}_0^x (f\,g) \leq (\sup f) \mathop{\mathfrak{M}}_0^x g\,.$$

Assim, de (7) obtemos, aplicando o operador média a ambos os membros, e tendo em atenção que conhecemos já a média das funções x^k, cf. (5),

$$\frac{e^x - 1}{x} > 1 + \frac{x}{2}\,, \quad \text{i.e.} \quad e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}\,.$$

De $e^{-x} > 1 - x$, i.e. $e^x < 1 + x\,e^x$, com $x > 0$, obtemos, aplicando o operador média a ambos os membros, e tendo em atenção o teorema do valor médio, anteriormente estabelecido,

$$\frac{e^x - 1}{x} < 1 + \frac{x}{2}\,e^x\,, \quad \text{ou} \quad e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!}\,e^x\,.$$

Acabámos de provar que, para todo o $x > 0$,

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!}\,e^x\,.$$

O caso $x < 0$ é um pouco mais simples. De facto, de (7) obtemos, aplicando o operador média,

$$\frac{e^x - 1}{x} > 1 + \frac{x}{2}\,, \ x < 0\,, \quad \text{i.e.} \quad e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!}\,;$$

aplicando uma vez mais o operador média,

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\,, \ x < 0\,.$$

Assim, para todo o $x < 0$,

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!}\,.$$

Iterando o processo anterior, obtemos que o *erro* cometido quando representamos a função exponencial na forma

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,,$$

é inferior a

$$\left(e^x - 1\right) \frac{x^n}{n!}\,, x > 0 \quad \text{e a} \quad \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\,, \ x < 0\,.$$

Ora, $\left(|x|^n/n!\right)$ é uma sucessão com limite zero, considerando x em intervalos fechados, I, de $\mathbb{R}$. De facto, se $x = 0$, é evidente; e para todo $0 \neq x \in I$,

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)\,n!} \times \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

logo $\left(|x|^n/n!\right)$ é majorada por uma progressão geométrica de razão em $]0,1[$. Assim,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\,,$$

é a representação em série de potências da função exponencial, que é absoluta e uniformemente convergente sobre intervalos fechados, I, de $\mathbb{R}$.