CONJUNTOS AGUDOS


Pedro J. Freitas
Universidade de Lisboa
pjfreitas@fc.ul.pt


Manuel Silva
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

O problema que trazemos hoje tem uma formulação muito simples em dimensão 2: quantos pontos podemos pôr no plano, por forma a garantir que os segmentos determinados por estes pontos apenas definam ângulos agudos? E no espaço tridimensional?

Há um campo da geometria cujos problemas têm um encanto especial, a geometria combinatória. Isto porque os problemas são, em geral, fáceis de perceber, podendo ser vistos como *puzzles*, mas têm por vezes soluções bastante sofisticadas. Por exemplo, se o leitor tiver moedas no bolso, todas iguais, pode tentar descobrir qual o maior número de moedas que se podem dispor sobre uma mesa (mesmo que nem todas estejam em contacto com a mesa), de modo, a que cada moeda toque em todas as restantes. Ou pensar no mesmo problema para cigarros. Em ambos os casos, a formalização do problema é feita com cilindros (colocando restrições adequadas à razão entre o raio da base e a altura). Com algum esforço, é possível encontrar disposições com cinco moedas e com sete cigarros, mas não é fácil provar que estes são os números máximos para tais arranjos. Menos ainda, classificar todas as soluções. Ambos estes problemas foram divulgados por Martin Gardner, na sua coluna regular do *Scientific American*.

O problema de hoje pode ser motivado pela posição dos vértices de um cubo. Se considerarmos os vários ângulos formados por três destes vértices, verificamos que são sempre retos ou agudos. No entanto, se juntarmos mais um ponto (dentro ou fora do cubo), já não conseguiremos evitar que três pontos formem um ângulo obtuso. Ou seja: conseguimos um conjunto de oito pontos em $\mathbb{R}^3$ que não formam nenhum ângulo obtuso, mas aparentemente já não conseguiremos o mesmo com nove pontos...

Nos anos 50, Erdős generalizou esta conjetura para qualquer dimensão: se tivermos mais de 2^d pontos em $\mathbb{R}^d$, então há três deles que definem um ângulo obtuso. Pensando que o cubo de $\mathbb{R}^d$ tem exatamente 2^d vértices, podemos reformular a conjetura dizendo que o número máximo de pontos de $\mathbb{R}^d$ que não definem nenhum ângulo obtuso é 2^d (em particular, é exponencial em d).

Este resultado foi provado em 1962 por Danzer e Grünbaum, em [1]. O artigo lança então uma nova pergunta: o que é que acontece se quisermos excluir também ângulos retos? Isto é, qual o número máximo de pontos de $\mathbb{R}^d$ com a propriedade de que qualquer ângulo definido por esses pontos seja agudo? Visto que este será o tema do nosso artigo presente, vamos chamar a um conjunto com estas características um conjunto agudo, e denotaremos por $f(d)$ o número máximo de elementos de um conjunto agudo.

Para $d = 2$ é simples de ver que este número máximo é 3, isto é $f(2) = 3$, pois é simples encontrar triângulos só com ângulos agudos. Mas a soma dos ângulos de qualquer quadrilátero convexo é 360º, de modo que os ângulos não podem ser todos agudos (se o quadrilátero definido pelos pontos não for convexo, a justificação é igualmente simples). Para $d = 3$, poderíamos pensar que, tal como no caso $d = 2$, bastaria tirar um vértice ao cubo e rearranjar os restantes, mas na verdade isto não funciona: temos $f(3) = 5$ (o resultado foi conseguido ainda nos anos 60). Provou-se então que $2d - 1 \leq f(d)$, e conjeturou-se haveria igualdade, isto é, este seria o valor máximo de elementos de um conjunto agudo. A exclusão de ângulos retos diminuiria o valor de $f(d)$ de exponencial para linear.

No entanto, em 1983, Erdős e Füredi provaram que esta conjetura estava errada, encontrando um conjunto agudo em $\mathbb{R}^d$ com uma cardinalidade exponencial em d, a saber, maior do que $0.5 \cdot 1.15^d$. Para tal, usaram o método probabilístico. A demonstração consistiu em escolher de forma aleatória mas criteriosa um número de vértices do cubo de $\mathbb{R}^d$ superior a $0.5 \cdot 1.15^d$, que se prova formar um conjunto agudo. Para mais detalhes, veja-se [2]. O resultado foi melhorado por Harangi em [3]: $f(d) \geq c \cdot 1.2^d$.

Como se sabe, este método probabilístico (muito usado por Erdős) é muito elegante, mas não é construtivo. Ora, recentemente, houve novidades acerca deste problema: um jovem aluno de secundário, na Rússia, D. Zakharov, forneceu uma maravilhosa demonstração construtiva para conjuntos agudos em $\mathbb{R}^d$. O artigo tem duas páginas, e pode encontrar-se no arXiv (ver [4]). O minorante encontrado neste artigo é $f(d) \geq 2 \cdot 2^{\frac{d}{2}}$, ou seja, $2 \cdot 1.41^d$.

O artigo estabelece a seguinte relação de recorrência:

$$f(d+2) \geq 2f(d), \text{ para } d \geq 4. \qquad (1)$$

Daqui é simples concluir a minoração indicada, sabendo que $f(4) \geq 8 = 2 \cdot 2^2$ e $f(5) \geq 12 > 2 \cdot 2^{2.5}$.

Para estabelecer a relação (1), toma-se um conjunto agudo $X \subset \mathbb{R}^d$, com $f(d)$ pontos, e consideram-se os produtos internos dos vetores definidos pelos pontos de X. Com isso constrói-se um conjunto agudo em $\mathbb{R}^{d+2}$ com $2f(d)$ pontos.

Mais detalhadamente, se s for o mínimo desses produtos internos, temos $s > 0$ por o conjunto ser agudo. Toma-se, então, $r < \sqrt{s}/2$ e, para cada ponto $x \in A$, define-se um ponto $\phi(x)$ na circunferência de centro 0 e raio r em $\mathbb{R}^2$, com a única restrição de todos estes pontos $\pm\phi(x)$ na circunferência serem distintos. Seja então

$$Y = \{(x, \pm\phi(x)) : x \in X\}.$$

Prova-se, então, que este é um conjunto agudo em $\mathbb{R}^{d+2}$, com $2f(d)$ pontos.

Esta história do problema é muito encorajadora: não só o primeiro minorante, obtido não construtivamente, foi descrito por um processo muito elegante, como esta construção final se revelou inesperadamente simples, acessível até a um aluno de primeiro ano de um curso de matemática. Terminamos relembrando uma afirmação de Hardy: "There is no permanent place in the world for ugly mathematics".

REFERÊNCIAS

[1] L. Danzer, B. Grünbaum, "Uber zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P. Erdős und von V.L. Klee", *Math. Zeitschrift* 79 (1962), 95-99.

[2] P. Erdős, Z. Füredi, "The greatest angle among n points in the d-dimensional Euclidean space", *Ann. Discrete Math.* 17 (1983), 275-283.

[3] V. Harangi, "Acute sets in Euclidean spaces", *SIAM J. Discrete Math.*, 25(3), 1212-1229.

[4] D. Zakharov, *Acute sets*, arXiv:1705.01171v1.