26.06.71

2.º ANO - N.º 8

GAZETA DE MATEMÁTICA

OUTUBRO DE 1941

Redacção e Administração: Faculdade de Ciências — Rua da Escola Politécnica — Lisboa

EDITOR: JOSÉ DUARTE DA SILVA PAULO

Composto e impresso na Soc. Industrial de Tipografia, Limitada R. Almirante Pessanha, 3 e 5 - Lisboa

OS MÉTODOS AXIOMÁTICOS MODERNOS E OS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA

(De uma conferência feita por J. Dieudonné, professor da Faculdade de Ciências de Nancy, no Instituto de Altos Estudos de Bruxelas, em 11 de Janeiro de 1939, publicada em «Revue Scientifique, 77[e] *année, n.º 4 — Avril 1939, Paris)*.

... com Euclides e depois dêle até ao século XIX, a situação das matemáticas é a seguinte: raciocina-se sôbre noções de que se possue uma idéia vaga, concebidas como uma espécie de idealizações experimentais, sôbre as quais se admite um certo número de proposições verdadeiras, que aparecem, também, como extrapolações da experiência. Até mesmo, quando se agrava mais êste estado de coisas, como após a introdução dos infinitésimos e dos imaginários, com as intermináveis discussões que provoca o problema da sua «natureza», parece que ninguém se impressiona com o caso; é que as conclusões do raciocínio dedutivo mantêm-se sempre, como os próprios axiomas, com uma natureza intuïtiva e vizinha dos factos experimentais e que, por outro lado, as aplicações da matemática às ciências experimentais, longe de conduzirem a absurdos, dão-lhes, pelo contrário, um impulso novo e fazem-nas avançar de êxito em êxito. O fim justificando os meios, a matemática desenvolve-se cada vez mais sem se inquietar com as bases sôbre que assenta.

Esta atitude modifica-se porém, quando, com os progressos da Análise, aparecem, na segunda metade do século XIX êsses sêres motivo de espanto para os contemporâneos como as curvas sem tangentes, as curvas preenchendo um quadrado, as superfícies não regradas aplicáveis sôbre o plano, primeiros espécimes duma galeria de monstros que não cessou de ampliar-se até nossos dias. Torna-se então clara e duma maneira indiscutível que a extrapolação que conduziu das noções experimentais às noções matemáticas está longe de ser uma operação tão natural e tão anódina como se viu até então; e, por outro lado, também se aprende, pela primeira vez, a desconfiar da intuïção nos raciocínios matemáticos visto que factos tão intuïtivos como a existência duma tangente a uma curva são matemàticamente falsos em geral. Daqui resulta o passar a impor-se desde então a necessidade absoluta a todo o matemático empenhado na probidade intelectual de apresentar os seus raciocínios sob forma *axiomática*, isto é, sob uma forma em que as proposições se encadeiam *ùnicamente em virtude das regras da lógica*, fazendo voluntàriamente abstracção de tôdas as «evidências» intuïtivas que podem ser sugeridas ao seu espírito pelos termos que aí figuram. Frisamos que se trata de uma forma que se impõe na *apresentação* dos resultados; tal porém em nada diminue o papel da intuïção na sua *descoberta*, papel que para a maioria dos investigadores se reduz a uma intuïção, por ventura confusa, dos fenómenos matemáticos que estudam, mas que conduz freqùentemente ao caminho que os levará ao termo.

Mas o terreno que a intuïção conquistou assim dum único salto é necessário em seguida, ser organizado, é preciso forjar, elo a elo, a cadeia das proposições que conduzirá ao resultado procurado; e, neste trabalho, a intuïção não deve desempenhar lugar algum; só a lógica estricta domina, e é à fria luz desta que devem ser examinadas as verdades que o matemático se lisongeia já de terem sido descobertas; trabalho ingrato e quantas vezes fastidioso, mas quanto útil, porque quem fez investigações matemáticas sabe bem que a verdadeira intuïção se sente raramente de comêço e que a maior parte do seu labor consiste em regeitar, umas após outras, as intuïções falsas!

. . . .

Acusa-se com freqùência os métodos axiomáticos de secos e estéreis. Quanto ao primeiro ponto, tudo depende essencialmente do talento do expositor; nada impede êste, conservando-se perfeitamente rigoroso, de escolher uma linguagem suficientemente rica de imagens para despertar no leitor ressonâncias intuïtivas apropriadas. Quanto à segunda objecção, a história do desenvolvimento das matemáticas, no decurso dos trinta últimos anos, basta para a reduzir a zero; o emprêgo do método axiomático, mostrando claramente donde provinha cada proposição e quais eram, em cada caso, as hipóteses essenciais e as hipóteses supérfluas, revelou analogias insuspeitáveis e permitiu generalizações extensas: os desenvolvimentos modernos da Algebra, da Topologia, da Teoria dos Grupos não têm por origem senão a generalização do emprêgo dos métodos axiomáticos.

¿ Quais seriam as novas bases da ciência matemática uma vez reconhecida a necessidade do método axiomático? Antes de mais nada tornava-se indispensável um trabalho de revisão das teorias desenvolvidas anteriormente, porque se reconhecera claramente que nos raciocínios feitos até então se haviam introduzido a cada passo considerações intuïtivas e que os sistemas de axiomas em que, por assim dizer, assentavam os raciocínios eram insuficientes para os desenvolver com todo o rigor. A mais célebre destas revisões (sem dúvida porque dizia respeito à parte das matemáticas conhecida pelo maior número e que passava até então por um modêlo de rigor) foi a feita por Hilbert sôbre a geometria euclideana nos «Grundlagen der Geometrie» publicados em 1899: formulava-se aí um sistema de 21 axiomas, e mostrava-se que êstes eram *necessários e suficientes* para demonstrar rigorosamente tôdas as proposições conhecidas da geometria euclideana a 2 e a 3 dimensões.

. . . .

Pela mesma altura outros matemáticos levaram a bom termo um trabalho análogo ao de Hilbert em todos os outros ramos das matemáticas; umas após outras as diversas geometrias, a aritmética, a álgebra, a teoria dos grupos, a teoria das funções de variável real e de variável complexa, eram *axiomatizadas* e sempre pelo mesmo processo: tomava-se como ponto de partida um *conjunto* de elementos de natureza absolutamente indeterminada, mas entre os quais existiam certas relações, relações estas submetidas a condições dadas; o sistema destas condições constituia o sistema de *axiomas* da teoria, donde tôdas as outras proposições deviam deduzir-se pelo emprêgo exclusivo das regras da lógica. Por exemplo, um *grupo* pode definir-se como um conjunto de elementos onde é definida uma função de 2 variáveis $f(a, b)$ que, quaisquer que sejam os elementos a e b do conjunto, é ainda um elemento do conjunto; além disso, os axiomas da teoria são os seguintes: 1.º — $f(f(a, b), c)=f(a, f(b, c))$, quaisquer que sejam a, b e c; 2.º — existe um elemento e do conjunto, tal que $f(e, a)=a$, para qualquer a. 3.º — A todo o elemento a corresponde outro elemento b do conjunto, tal que $f(b, a)=e$.

A que resultado se chegou ao terminar êste enorme trabalho de axiomatização? Em primeiro lugar quanto à *verdade* das proposições matemáticas libertou-se esta de todo e qualquer contacto com a noção de *verdade experimental*; certo é que procedendo assim se tinha feito perder aquêle carácter de *absoluto* que tanto encantava os nossos antepassados; tratava-se agora duma *verdade hipotética* de qualquer modo, isto é, as proposições matemáticas passavam a ser só consideradas verdadeiras em virtude de um decreto puramente arbitrário pelo qual se declaravam verdadeiros os axiomas; a única verdade *absoluta* que se mantinha era a das *regras da lógica*.

Em segundo lugar, qual era a *inteligibilidade* da linguagem matemática com êste novo ponto de vista, ou por outras palavras, a que representações mentais deviam corresponder os termos que eram empregados? Sem dúvida, era bem especificado ser inútil ter uma imagem precisa dos objectos sôbre os quais se raciocina; como dizia B. Russell: «A matemática é a ciência em que não se sabe do que se fala, nem se o que se diz é verdadeiro». Mas havia pelo menos uma qualidade que se atribuia a êsses objectos misteriosos, era o *existirem*; e com o *existirem* a propriedade de s rem elementos de conjuntos, de terem entre si *relações*, estarem em *correspondência* uns com outros, e finalmente poderem ser os objectos de raciocínios dedutivos segundo as velhas regras da lógica aristotélica, tais como tinham sido rejuvenescidas e codificadas pelos lógicos do século XIX (Boole, Schröder, Frege).

Em definitivo, as noções indefiníveis da nova matemática e de que portanto era necessário ter uma clara representação mental, eram a noção de *conjunto* e tôdas as noções conexas: correspondência, função, subconjunto, soma de conjuntos, etc., numa palavra, tôdas as noções cujo estudo especial constituia a recente teoria dos conjuntos, que o génio de Cantor acabava de criar.

. . . .

Trad. de M. Z.

UM PROBLEMA DE GEOMETRIA DESCRITIVA RESOLVIDO POR SEMELHANÇA

Dados: — Desenhar um triângulo $U'V'W'$, sendo $U'V'=9$ cm $V'W'=8$ cm e $U'W'=6$ cm (fig. 1).

Traçar a altura que parte de W' e a bissectriz do ângulo em V'; designar por O' o ponto de intersecção da altura com a bissectriz. Considerar U', V', W', O', como projecções (projecção paralela) de quatro pontos U, V, W, O, tais que $OU=OV=OW$ e OW perpendicular a OU e OV e ângulo de OU com OV igual a 60 graus.

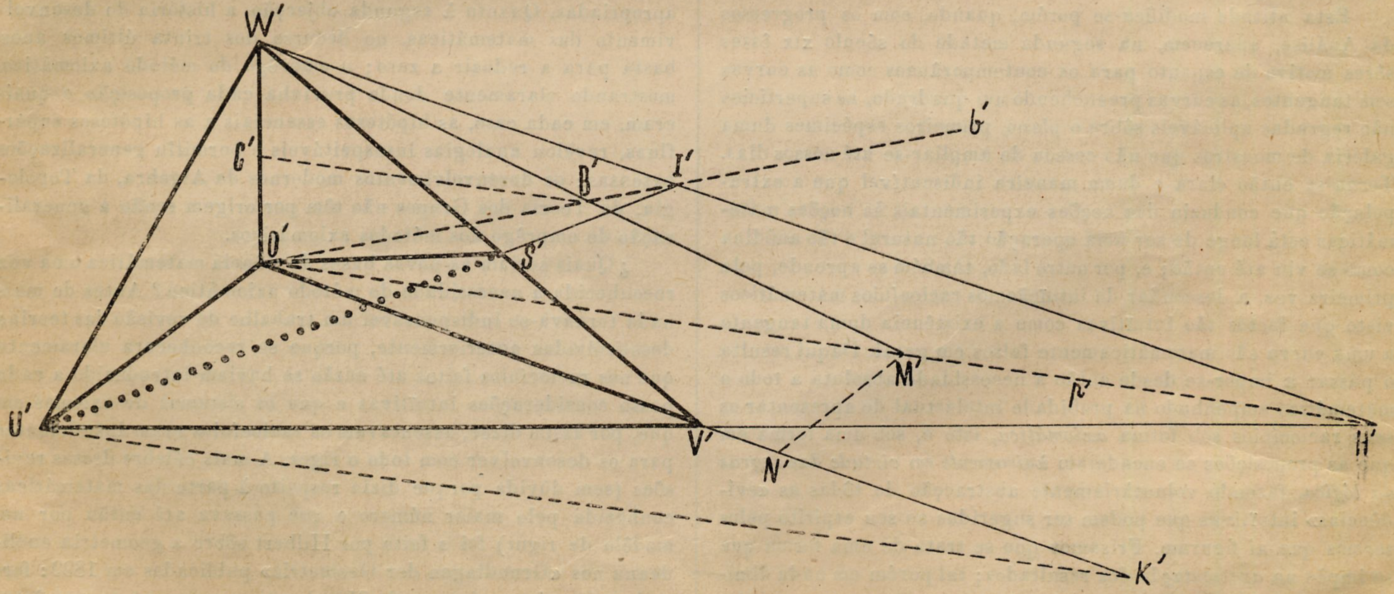

Fig. 1

Pedido: — Determinar a projecção da secção feita no tetraedro $OUVW$ pelo plano bissector do diedro OU.