. . . .

Pela mesma altura outros matemáticos levaram a bom termo um trabalho análogo ao de Hilbert em todos os outros ramos das matemáticas; umas após outras as diversas geometrias, a aritmética, a álgebra, a teoria dos grupos, a teoria das funções de variável real e de variável complexa, eram *axiomatizadas* e sempre pelo mesmo processo: tomava-se como ponto de partida um *conjunto* de elementos de natureza absolutamente indeterminada, mas entre os quais existiam certas relações, relações estas submetidas a condições dadas; o sistema destas condições constituía o sistema de *axiomas* da teoria, donde tôdas as outras proposições deviam deduzir-se pelo emprêgo exclusivo das regras da lógica. Por exemplo, um *grupo* pode definir-se como um conjunto de elementos onde é definida uma função de 2 variáveis $f(a,b)$ que, quaisquer que sejam os elementos a e b do conjunto, é ainda um elemento do conjunto; além disso, os axiomas da teoria são os seguintes: 1.º — $f(f(a,b),c)=f(a,f(b,c))$, quaisquer que sejam a, b e c; 2.º — existe um elemento e do conjunto, tal que $f(e,a)=a$, para qualquer a. 3.º — A todo o elemento a corresponde outro elemento b do conjunto, tal que $f(b,a)=e$.

A que resultado se chegou ao terminar êste enorme trabalho de axiomatização? Em primeiro lugar quanto à *verdade* das proposições matemáticas libertou-se esta de todo e qualquer contacto com a noção de *verdade experimental*; certo é que procedendo assim se tinha feito perder aquêle carácter de *absoluto* que tanto encantava os nossos antepassados; tratava-se agora duma *verdade hipotética* de qualquer modo, isto é, as proposições matemáticas passavam a ser só consideradas verdadeiras em virtude de um decreto puramente arbitrário pelo qual se declaravam verdadeiros os axiomas; a única verdade *absoluta* que se mantinha era a das *regras da lógica*.

Em segundo lugar, qual era a *inteligibilidade* da linguagem matemática com êste novo ponto de vista, ou por outras palavras, a que representações mentais deviam corresponder os termos que eram empregados? Sem dúvida, era bem especificado ser inútil ter uma imagem precisa dos objectos sôbre os quais se raciocina; como dizia B. Russell: «A matemática é a ciência em que não se sabe do que se fala, nem se o que se diz é verdadeiro». Mas havia pelo menos uma qualidade que se atribuia a êsses objectos misteriosos, era o *existirem*; e com o *existirem* a propriedade de s rem elementos de conjuntos, de terem entre si *relações*, estarem em *correspondência* uns com outros, e finalmente poderem ser os objectos de raciocínios dedutivos segundo as velhas regras da lógica aristotélica, tais como tinham sido rejuvenescidas e codificadas pelos lógicos do século XIX (Boole, Schröder, Frege).

Em definitivo, as noções indefiníveis da nova matemática e de que portanto era necessário ter uma clara representação mental, eram a noção de *conjunto* e tôdas as noções conexas: correspondência, função, subconjunto, soma de conjuntos, etc., numa palavra, tôdas as noções cujo estudo especial constituia a recente teoria dos conjuntos, que o génio de Cantor acabava de criar.

. . . .

Trad. de M. Z.

UM PROBLEMA DE GEOMETRIA DESCRITIVA RESOLVIDO POR SEMELHANÇA

Dados: — Desenhar um triângulo $U'V'W'$, sendo $U'V'=9$ cm $V'W'=8$ cm e $U'W'=6$ cm (fig. 1).

Traçar a altura que parte de W' e a bissectriz do ângulo em V'; quatro pontos U, V, W, O, tais que $OU=OV=OW$ e OW perpendicular a OU e OV e ângulo de OU com OV igual a 60 graus.

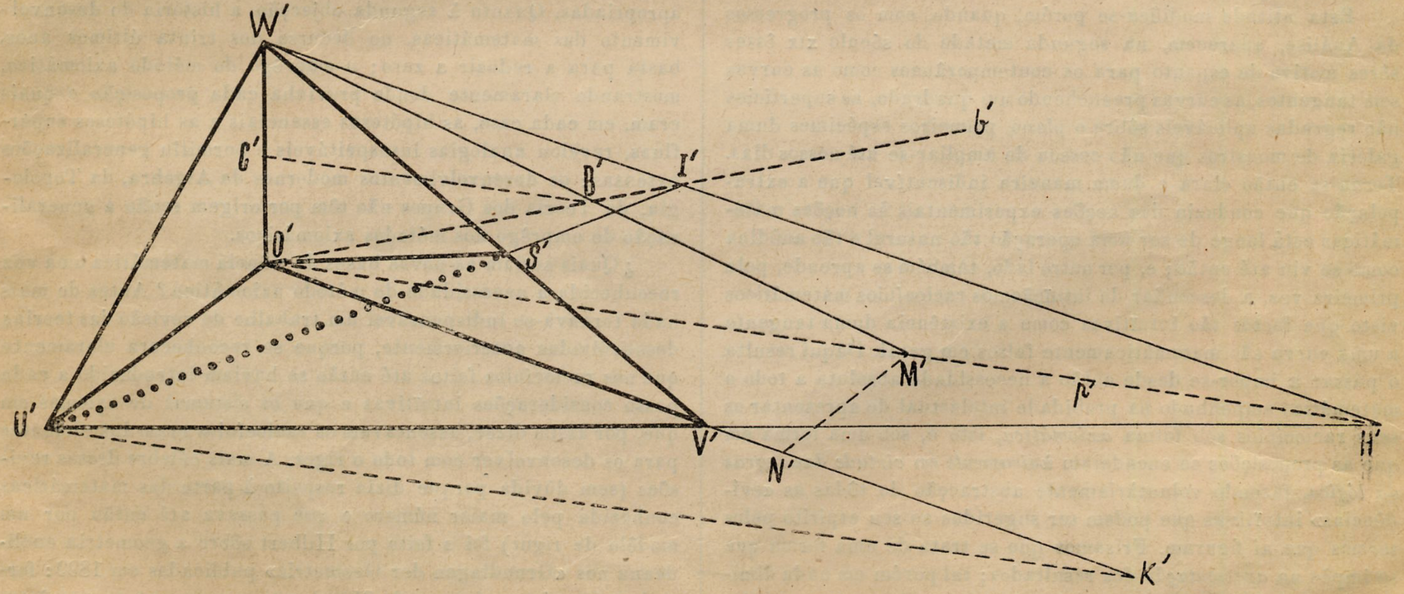

Fig. 1

designar por O' o ponto de intersecção da altura com a bissectriz. Considerar U', V', W', O', como projecções (projecção paralela) de

Pedido: — Determinar a projecção da secção feita no tetraedro $OUVW$ pelo plano bissector do diedro OU.

RESOLUÇÃO:

1.º. Determinação do rectilíneo do diedro em OU.

Na aresta OU concorrem as faces OUW e OUV. Como OW é por hipótese perpendicular a OU e está situada no plano OUW, para determinarmos o rectilíneo pedido, bastará construir a perpendicular p em O a OU, situada na face OUV.

Desenhemos (fig. 2), um triângulo $\overline{O}\overline{U}\overline{V}$, semelhante ao triângulo OUV, tomando $\overline{O}\overline{V}=O'V'$.

O triângulo $O'U'V'$ pode considerar-se como projecção paralela do triângulo $\overline{O}\overline{U}\overline{V}$, colocado de maneira que $\overline{O}\overline{V}$ seja paralela ao plano de projecção.

Na fig. 2 tracemos por $\overline{U}$ uma recta perpendicular a $\overline{O}\overline{U}$ e designemos por $\overline{K}$, oponto de encontro com $\overline{O}\overline{V}$.

Marcando na fig. 1, sôbre $O'V'$ a partir de O', um segmento igual a $\overline{O}\overline{K}$, obtemos um ponto que designaremos por K'.

A recta $U'K'$, dá-nos no plano UOV, a direcção das projecções das perpendiculares a OU.

Tirando por O' uma paralela a $U'K'$, obtemos p', projecção da recta p procurada.

O rectilíneo pedido fica portanto determinado pelas rectas OW e p.

2.º. Determinação da bissectriz do rectilíneo construído.

Tiremos fig. 2, por $\overline{O}$, uma recta $\overline{p}$ paralela a $\overline{U}\overline{K}$, e marquemos nessa recta um ponto $\overline{M}$, tal que $\overline{O}\overline{M}=\overline{O}\overline{V}$.

Tirando por $\overline{M}$ uma paralela a $\overline{O}\overline{U}$, determinamos pela intersecção desta recta com $\overline{O}\overline{V}$ um ponto $\overline{N}$.

Marcando fig. 1, sôbre $O'V'$ um ponto N', tal que $O'N'=\overline{O}\overline{N}$, e tirando por êsse ponto uma paralela a $O'U'$, obtemos na recta p', um ponto M' tal que $OW=OM$.

Unindo W' com M', obtemos um triângulo $W'O'M'$, projecção dum triângulo rectângulo isósceles.

Desenhemos fig. 3 um triângulo $\overline{\overline{W}}\overline{\overline{O}}\overline{\overline{M}}$, semelhante ao triângulo WOM, tomando $\overline{\overline{O}}\overline{\overline{W}}=O'W'$.

O triângulo $W'O'M'$ pode considerar-se como projecção paralela do triângulo $\overline{\overline{W}}\overline{\overline{O}}\overline{\overline{M}}$, colocado de maneira que $\overline{\overline{O}}\overline{\overline{W}}$ seja paralelo ao plano de projecção.

Tiremos a bissectriz do ângulo $\overline{\overline{W}}\overline{\overline{O}}\overline{\overline{M}}$, e designemo-la por $\overline{\overline{b}}$, designando por $\overline{\overline{B}}$, o ponto de intersecção de $\overline{\overline{b}}$ com $\overline{\overline{W}}\overline{\overline{M}}$.

Tiremos por $\overline{\overline{B}}$ uma paralela a $\overline{\overline{O}}\overline{\overline{M}}$, determinando pela sua intersecção com $\overline{\overline{O}}\overline{\overline{W}}$, um ponto $\overline{\overline{C}}$. Marcando fig. 1 sôbre $O'W'$, um ponto C', tal que $O'C'=\overline{\overline{O}}\overline{\overline{C}}$, e tirando por C' uma paralela a $O'M'$, determinamos na recta $M'W'$ um ponto B'.

Unido O' com B' obtemos b' projecçãoda bissectriz b pedida.

3.º. *Secção.* — O plano secante é portanto o plano OU,b, que vamos designar por α.

a) Intersecção do plano α com o plano UVW.

O plano α intersecta o plano WOM, segundo a recta b. Vamos determinar a intersecção do plano UVW com o plano WOM. A recta p existe no plano UOV, logo intersecta a recta UV, num ponto H que se projecta em H'.

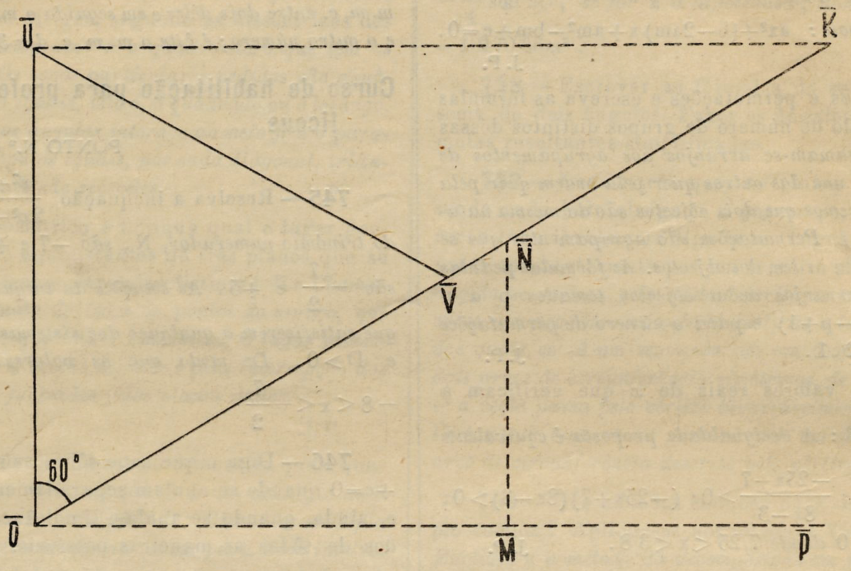

Fig. 2

A recta WH que se projecta em $W'H'$ é a intersecção de UVW com WOM. Isto é:

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ WOM\end{matrix}\right\} b, \quad \left.\begin{matrix}UVW\\ WOM\end{matrix}\right\} WH.$$

A recta b encontra a recta WH num ponto I que se projecta em I'.

Como o ponto U pertence ao plano α e ao plano UVW, a intersecção procurada é UI, que se projecta em $U'I'$.

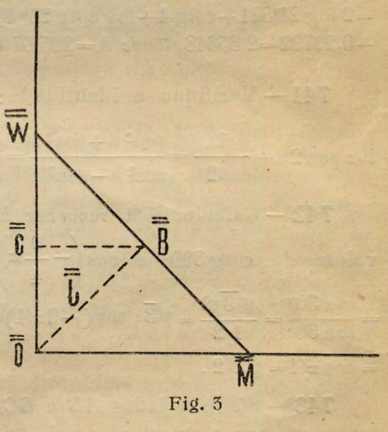

Fig. 3

b) Intersecção do plano α com o plano WOV.

A recta UI determina com WV, um ponto S. A recta OS, projectada em $O'S'$, é a intersecção do plano α com o plano WOV.

O triângulo secção é portanto UOS.

Jayme Rios de Souza (assistente do 1.º grupo da 1.ª secção da Faculdade de Ciências do Pôrto)