I. S. T. — Março de 1941

787 — Determimar sôbre a circunferência de intersecção do plano $y=2x$ com a esfera de raio R e de centro na origem, os máximos e mínimos da função $F=x-y-z$. (Eixos rectangulares). R: *As equações de condição são* $\varphi_1(x,y,z)\equiv 2x-y=0$ *e* $\varphi_2(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2-R^2=0$. *Os pontos de estacionaridade da função* F *são as soluções do sistema:*

$$\left[\begin{array}{l}\varphi_1=0\\ \varphi_2=0\\ \dfrac{\partial(F,\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x,y,z)}=0\end{array}\right. \quad ou \quad \left\{\begin{array}{l}2x-y=0\\ x^2+y^2+z^2-R^2=0\\ x+2y-z=0\,.\end{array}\right.$$

M. Z.

788 — Calcular o integral $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(x^3-1)^2}$. R: *A função integranda é racional. Tem-se* $(x^3-1)^2=(x-1)^2(x^2+x+1)^2$. *A regra de Fubini permite escrever imediatamente* (1) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(x^3-1)^2}=A\log(x-1)+B\log(x^2+x+1)+C\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}+C.^{te}$. *As constantes* A, B, C, D, E, F *são a solução do sistema de equações lineares que se obtém por identificação dos 2 membros da igualdade que resulta de* (1) *por derivação.*

M. Z.

789 — Dado o sistema $\left\{\begin{array}{l}x+y+z+u=0\\ x^y\log z-u^x\log y=4\end{array}\right.$ calcular $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

790 — Verificar em $f(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{x^3+y^3+z^3}}{\sqrt{x+y+z}}$ as propriedades fundamentais das funções homogéneas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

791 — Provar que para k, inteiro positivo, é nulo o seguinte determinante

$$\left|\begin{array}{cccccc}\frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{(2k+1)!} & \frac{1}{(2k+2)!}\\ 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(2k)!} & \frac{1}{(2k+1)!}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(2k-1)!} & \frac{1}{(2k)!}\\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{2!}\end{array}\right|.$$

792 — Mostrar que o determinante Δ_n é nulo para $n>2$.

$$\Delta_n=\left|\begin{array}{cccc}a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n\\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n\\ a_3-b_1 & a_3-b_2 & \cdots & a_3-b_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n\end{array}\right|.$$

793 — Calcular o determinante de ordem n cujos elementos e_{ij} são dados por $e_{11}=e_{1j}=e_{i1}=1$ e $e_{ij}=e_{i-1,j}+e_{i,j-1}$ $(1<i,j\leq n)$.

794 — O sucessor do produto de quatro inteiros consecutivos é um quadrado.

$$(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2)+1=(n^2+n-1)^2.$$

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS EM NÚMEROS ANTERIORES

706 — Numa circunferência de raio R traça-se um triângulo inscrito. Dois dos lados dêste triângulo limitam segmentos circulares cujas alturas são $R/6$ e $R/8$. Calcular a área do triângulo. R: *Sejam* AB *e* BC *as cordas que limitam os segmentos de alturas* R/6 *e* R/8 *respectivamente. Tem-se imediatamente:* $(\overline{AB}/2)^2=R/6\,.\,(2R-R/6)=11R^2/36$ *e* $(\overline{BC}/2)^2=R/8\,(2R-R/8)=15R^2/64$, *donde* $\overline{AB}=R\sqrt{11}/3$ *e* $\overline{BC}=R\sqrt{15}/4$. *A altura* $\overline{BD}$ *do triângulo* [ABC] *de base* $\overline{AC}$ *permitirá determinar a área pedida, por intermédio do cálculo* AD *e* DC. BD *pode encontrar-se como segue: Tome-se o diâmetro de uma circunferência dada, de que uma extremidade é* B; *seja* F *o outro extremo dêsse diâmetro; os triângulos rectângulos* [BAD] *e* [BFC] *são semelhantes porque os ângulos em* A *e* F *são iguais. Então* $\overline{BD}:\overline{BC}=\overline{AB}:\overline{BF}$ *e, portanto,* $\overline{BD}=R\sqrt{165}/24$ *visto ser* $BF=2R$.

Tem-se pois $\overline{DC}=\sqrt{15\;{}^2/16-165R^2/24^2}=5\sqrt{15}R/24$ *e* $\overline{AD}=\sqrt{11R^2/9-165R^2/24^2}=7\sqrt{11}R/24$. *A área pedida é pois* $1/2\,(\overline{AD}+\overline{DC})\,.\,\overline{BD}=(77\sqrt{15}+75\sqrt{11})\,.\,R^2/1152$.

EMIDIO DE OLIVEIRA

332 — Demonstrar a identidade: ${}^nC_r+2\,{}^nC_{r-1}+{}^nC_{r-2}={}^{n+2}C_r$. R: *O primeiro membro da igualdade pode escrever-se* ${}^nC_r+2\,{}^nC_{r-1}+{}^nC_{r-2}=$

$$=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}+2\,\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}+\frac{n!}{(r-2)!\,(n-r+2)!}=$$

$$=\frac{n!\,(n-r+1)\,(n-r+2)+2n!\,r\,(n-r+2)+n!\,r\,(r-1)}{r!\,(n-r+2)!}=$$

$$=\frac{n!\,(n^2+r^2-2nr+3n-3r+2+2nr-2r^2+4r+r^2-r)}{r!\,(n-r+2)!}=$$

$$=\frac{n!\,(n^2+3n+2)}{r!\,(n-r+2)!}=\frac{n!\,(n+1)\,(n+2)}{r!\,(n-r+2)!}=\frac{(n+2)!}{r!\,(n+2-r)!}={}^{n+2}C_r\quad c.\,q.\,d.$$

J. P.

333 — Se um triângulo $B=18°$ e $C=36°$ então é $a\;b=R$ o raio do círculo circunscrito ao triângulo. R: *E' fácil ver que os menores arcos da circunferência circunscrita ao triângulo* ABC *que tem por cordas os lados* b, c *e* a *medem respectivamente* 36°, 72° *e* 108°. *Como se sabe qualquer corda duma circunferência é igual ao diâmetro multiplicado pelo seno da metade do menor arco que a corda subtende; por isso será* $a=2R$ sen 54° *e* $b=2R$ sen 18°; *donde* $a-b=2R\,(\text{sen}\,54°-\text{sen}\,18°)=2R\,(0{,}809-0{,}309)=R$.

J. P.

RECTIFICAÇÕES

687 — Seja b a base e l o lado. Tem-se $\left\{\begin{array}{l}4l^2-b^2=4h^2\\ 2l+b=p\end{array}\right. \longrightarrow$ $\longrightarrow \left\{\begin{array}{l}2l-b=4h^2/p\\ 2l+b=p\end{array}\right.$ donde $l=\dfrac{4h^2+p^2}{4p}$ e $b=\dfrac{p^2-4h^2}{2p}$. Tem de ser, evidentemente, $p>2h$.

Aplicação numérica: $h=2$, $p=8 \longrightarrow l=2{,}5$ e $b=3$.

S. C.

654 — Intercalar entre as 1.ª e 2.ª linhas da 2.ª coluna: *que diferem entre si quer pela natureza quer pela ordem em que estão dispostos. Chamam-se combinações aos agrupamentos de objectos...*

J. P.