2.º ANO - N.º 7 JULHO DE 1941

GAZETA
DE
MATEMÁTICA

Redacção e Administração: Faculdade de Ciências — Rua da Escola Politécnica — Lisboa

EDITOR: JOSÉ DUARTE DA SILVA PAULO

Composto e impresso na Soc. Industrial de Tipografia, Limitada R. Almirante Pessanha, 3 e 5 - Lisboa

O TEOREMA DE ROUCHÉ E A RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

(CONTINUADO DO N.º 6)

3. *Resolução de sistemas de equações lineares e homogéneas.* O sistema $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j=b_i \ (i=1,2,\cdots m)$ diz-se *homogéneo* ou de equações *lineares* e *homogéneas* se $b_i=0 \ (i=1,2,\cdots m)$. Tem-se, portanto,

$$1)\quad \begin{cases} a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\cdots+a_{1n}\,x_n=0 \\ a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+\cdots+a_{2n}\,x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\,x_1+a_{m2}\,x_2+\cdots+a_{mn}\,x_n=0\,. \end{cases}$$

Da aplicação do teorema de Rouché ao sistema 1) resulta, imediatamente:

1.º *o sistema* 1) *é sempre compatível, admite sempre a solução* $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$;

2.º *é condição necessária e suficiente para que o sistema* 1) *admita soluções não nulas que o número de incógnitas seja superior à característica da matriz* $\mathbf{A}$ *dos coeficientes,* $k<n$, *o que implica a indeterminação do sistema;*

3.º *se no sistema* 1) *fôr* $m=n$, *é condição necessária e suficiente para que tenha soluções não nulas que o determinante associado*[1] *à matriz* $\mathbf{A}$ *dos coeficientes do sistema seja nulo;*

4.º *se o número de incógnitas é superior ao número de equações,* $n>m$, *o sistema* 1) *admite soluções não nulas e o seu grau de indeterminação é, pelo menos,* $m-n$.

O leitor encontrará a demonstração destas quatro proposições, baseada no teorema de Rouché, por exemplo, em B. J. Caraça, *Lições de Álgebra e Análise*, vol. I, págs. 393-394.

Seja k a característica da matriz $\mathbf{A}=((a_{ij}))$ dos coeficientes do sistema 1). A resolução dêste reduz-se à do sistema

$$2)\quad \begin{cases} a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\cdots+a_{1k}\,x_k=-(a_{1k+1}\,x_{k+1}+\cdots+a_{1n}\,x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}\,x_1+a_{k2}\,x_2+\cdots+a_{kk}\,x_k=-(a_{kk+1}\,x_{k+1}+\cdots+a_{kn}\,x_n) \end{cases}$$

ou

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\,x_j=-\sum_{l=k+1}^{n} a_{il}\,x_l \quad (i=1,2,\cdots k)$$

sendo

$$\Delta_p=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1k} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}\cdots a_{kk} \end{vmatrix}\neq 0.$$

A aplicação da regra de Cramer ao sistema 2) resolve o problema. O resultado reveste uma forma, particularmente, notável se $n=k+1$. Com efeito, nesta hipótese o sistema 2) escreve-se

$$3)\quad \begin{cases} a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\cdots+a_{1k}\,x_k=-a_{1k+1}\,x_{k+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}\,x_1+a_{k2}\,x_2+\cdots+a_{kk}\,x_k=-a_{kk+1}\,x_{k+1} \end{cases}$$

e a regra de Cramer conduz-nos a

$$\frac{x_1}{(-1)^{n-1}\,\Delta_1}=\frac{x_2}{(-1)^{n-2}\,\Delta_2}=\cdots=\frac{x_i}{(-1)^{n-i}\,\Delta_i}=\cdots=\frac{x_k}{-\Delta_k}=\frac{x_{k+1}}{\Delta_p}$$

onde Δ_i é o determinante que se obtém da matriz

$$\left\|\begin{matrix} a_{11}\cdots a_{1k+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}\cdots a_{kk+1} \end{matrix}\right\|$$

pela supressão da coluna i.

Pela sua importância, convém fixar os resultados na hipótese do sistema 3) se reduzir a

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0, \end{cases} \quad \text{com} \quad \Delta_p=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\neq 0.$$

Tem-se, como fácilmente se reconhece,

$$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{a'c-ac'}=\frac{z}{ab'-a'b}.$$

Exemplo I. Estudar o sistema

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \\ -x+y+z=0 \\ x+y=0. \end{cases}$$

A matriz do sistema tem característica 3, visto que é, por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-4\neq 0.$$

O sistema proposto é compatível, por ser homogéneo, mas admite apenas a solução nula, $x=y=z=0$.

Exemplo II. Estudar o sistema

$$\begin{cases} x+y+t+u=z \\ x+z+u=y+t \\ y=t \\ x+u=0 \\ y+t=z. \end{cases}$$

[1] Diz-se determinante associado à matriz $\mathbf{A}=((a_{ij}))$ $(i,j=1,2,\cdots n)$ o determinante $\delta(\mathbf{A})=|a_{ij}|$ $(i,j=1,2,\cdots n)$.

A característica do sistema é 3 e êste é indeterminado de grau 2. Tomemos para incógnitas principais x, y, z e as três primeiras equações. Tem-se

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

e, pela regra de Cramer ou, mais simplesmente, por redução,

$$x=-u \quad y=t \quad z=2t.$$

Determinemos um sistema fundamental de soluções [1]. Porque o sistema proposto é indeterminado de grau 2, o sistema fundamental tem 2 soluções que se obtêm, por exemplo, fazendo $u=0$, $t=1$ e $u=1$, $t=0$. Tem-se

$$\begin{cases} x=-1 \quad y=0 \quad z=0 \quad u=1 \quad t=0 \\ x=0 \quad y=1 \quad z=2 \quad u=0 \quad t=1. \end{cases}$$

Exemplo III. Estude o sistema

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z=0 \\ \beta x+\gamma y+\alpha z=0 \\ \gamma x+\alpha y+\beta z=0 \end{cases}$$

onde α, β, γ são as raízes cúbicas da unidade. (I. S. C. E. F., 1.ª Cadeira, 1.º Exame de freqüência de 1939-40. V. a resolução no n.º 5 da *Gaz. de Mat.* sob o n.º 484).

Exemplo IV. Encontrar as condições para que o sistema

$$\begin{cases} x=cy+bz \\ y=az+cx \\ z=bx+ay \end{cases}$$

represente uma recta; mostrar que a recta é representada por

$$\frac{x}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{y}{\sqrt{1-b^2}}=\frac{z}{\sqrt{1-c^2}}.$$

(F. C. C. exame de freqüência de 1938-39. Publicado no n.º 4 da *Gaz. de Mat.* sob o n.º 396).

Os três planos, cujas equações são as do sistema proposto, terão uma recta comum se o sistema fôr indeterminado de grau 1, ou, o que é o mesmo, se fôr 2 a característica da matriz **A** dos coeficientes do sistema.

Para tanto, é necessária e suficiente a verificação da condição

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ -c & 1 & -a \\ -b & -a & 1 \end{vmatrix} = 1-2abc-a^2-b^2-c^2=0$$

visto que ela implica o não anulamento de um, pelo menos, dos menores complementares dos elementos de Δ, ou, o que é o mesmo, de um, pelo menos, dos determinantes de 2.ª ordem da matriz **A**. O leitor verificará, fàcilmente, que há sempre três determinantes de **A** de 2.ª ordem não nulos simultâneamente e, portanto, é legítimo afirmar a verificação simultânea das três condições $1-a^2\neq 0$, $b+ac\neq 0$, $c+ab\neq 0$ ou $1-b^2\neq 0$, $a+bc\neq 0$, $c+ab\neq 0$, ou, ainda, $1-c^2\neq 0$, $a+bc\neq 0$, $b+ac\neq 0$.

Suponhamos que se tem $1-a^2\neq 0$, $b+ac\neq 0$ e $c+ab\neq 0$. Podemos, portanto, tomar duas quaisquer das equações do sistema para constituirem o sistema principal. Conforme considerarmos a 1.ª e a 2.ª equações, a 1.ª e a 3.ª ou a 2.ª e a 3.ª, assim obteremos

$$\frac{x}{b+ac}=\frac{y}{a+bc}=\frac{z}{1-c^2}, \quad \frac{x}{c+ab}=\frac{y}{1-b^2}=\frac{z}{a+bc},$$

$$\frac{x}{1-a^2}=\frac{y}{c+ab}=\frac{z}{b+ac}.$$

Tratando-se da mesma recta, será

$$\frac{b+ac}{c+ab}=\frac{a+bc}{1-b^2}=\frac{1-c^2}{a+bc}, \quad \frac{b+ac}{1-a^2}=\frac{a+bc}{c+ab}=\frac{1-c^2}{b+ac}$$

donde

$$a+bc=\sqrt{1-b^2}\cdot\sqrt{1-c^2}, \quad b+ac=\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-c^2}.$$

E, finalmente, as equações da recta tomarão a forma

$$\frac{x}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{y}{\sqrt{1-b^2}}=\frac{z}{\sqrt{1-c^2}}.$$

4. *Relações entre as soluções dum sistema de equações lineares não homogéneas e as do sistema correspondente de equações lineares e homogéneas* [2]. Dado o sistema de equações lineares não homogéneas

$$1) \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \qquad (i=1, 2, \cdots m)$$

diz-se sistema homogéneo correspondente ou sistema reduzido

$$2) \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots m).$$

Aproximando os resultados da teoria das equações lineares não homogéneas e da teoria das equações lineares homogéneas, resumidamente expostos nos parágrafos 2 e 3, com facilidade se deduzem as relações existentes entre as soluções gerais dos sistemas 1) e 2) que são, fundamentalmente, conseqüência da linearidade dos primeiros membros das equações de 1) e 2).

É basilar, nesta matéria, o

Teorema — A solução geral do sistema 1) *obtém-se somando à solução geral do sistema* 2) *uma solução particular qualquer do sistema* 1).

Seja $p=n-k$ o grau de indeterminação do sistema 2) e

$$\begin{cases} x_i=\sum_{l=1}^{p} \lambda_l\, \alpha_{il} & (i=1, 2, \cdots p) \\ x_j=\lambda_j & (j=p+1, \cdots n) \end{cases}$$

a sua solução geral, obtida do sistema fundamental de soluções

$$\begin{cases} x_i=\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots \alpha_{ip} & (i=1, 2, \cdots p) \\ x_j=\delta_{jp+1}, \delta_{jp+2}, \cdots \delta_{jn} & (j=p+1, \cdots n) \end{cases} \quad \text{com} \quad \delta_{jl}=\begin{cases} 1 \leftarrow j=l \\ 0 \leftarrow j\neq l. \end{cases}$$

Seja $x_i=\beta_i$ $(i=1, 2, \cdots n)$ uma solução particular do sistema 1).

A solução geral do sistema 1) será

$$\begin{cases} x_i=\beta_i+\sum_{l=1}^{p} \lambda_l\, \alpha_{il} & (i=1, 2, \cdots p) \\ x_j=\beta_j+\lambda_j & (j=p+1, \cdots n). \end{cases}$$

---

[1] Diz-se *sistema fundamental de soluções* dum sistema de equações lineares e homogéneas indeterminado de grau $n-k$ todo o conjunto de $n-k$ soluções do sistema linearmente independentes, portanto, qualquer outra solução do sistema é uma combinação linear delas e reciprocamente. Para a sua determinação v. B. J. Caraça, ob. cit., vol. I, p. 398-400.

[2] Como primeira leitura sôbre o assunto v. E. Borel — Principes d'Algèbre et d'Analyse (Bibliothèque d'Education Scientifique) p. 1-60.

Exemplo. $x=-8/3$, $y=2/3$, $z=1$, $t=z$ é uma solução do sistema

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-2y+z+t=-1 \\ 2x-y+2z+2t=0 \\ x-y+z+t=-1/3 . \end{cases}$$

O sistema reduzido escreve-se

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-2y+z+t=0 \\ 2x-y+2z+2t=0 \\ x=y+z+t=0 \end{cases}$$

cuja característica é 2. A regra de Cramer dá

$$x=-(z+t) \quad y=0 .$$

É um sistema fundamental de soluções

$$\begin{cases} x=-1 \quad y=0 \quad z=1 \quad t=0 \\ x=-1 \quad y=0 \quad z=0 \quad t=1 \end{cases}$$

e a solução geral do sistema reduzido é

$$x=-(\lambda+\mu) \quad y=0 \quad z=\lambda \quad t=\mu .$$

A solução geral do sistema proposto é

$$x=-(8/3+\lambda+\mu) \quad y=2/3 \quad z=1+\lambda \quad t=2+\mu .$$

5. *Bibliografia.* O leitor encontrará exposições teóricas do assunto tratado em:

B. J. Caraça — *Lições de Álgebra e Análise*, vol. I, p. 363-401; G. Vivanti — *Lezioni di Analisi Matematica*, vol. I, p. 104-116; S. Pincherle — *Lezioni di Algebra Complementare*, parte seconda, p. 81-106; E. Pascal — *I Determinanti*, p. 307-320; L. Massoutié — *Determinants, équations et formes linéaires*, p. 25-45;

exercícios resolvidos e propostos em:

G. Belardinelli — *Esercizi di Algebra Complementare*, p. 173-193; Aubert et Papelier — *Exercices d'Algèbre, d'Analyse et de Trigonométrie*, vol. I, p. 37-49; R. Noguès — *Cours de Mathématiques Spéciales sous forme de problèmes*, p. 17-19;

e, nos finais dos capítulos dedicados à exposição teórica do mesmo assunto, além das obras indicadas em primeiro lugar, em:

Niewenglowski — *Cours d'Algèbre*, vol. I, p. 214-216; C. Bourlet — *Leçons d'Algèbre Élémentaire*, p. 205-206; C. Comberousse — *Cours de Mathématiques*, vol. III, 1.ª parte, p. 302-312, 317-320; J. Haag — *Exercices du Cours de Mathématiques Spéciales*, p. 198-203.

A. SÁ DA COSTA

A LÓGICA MATEMÁTICA E O ENSINO MÉDIO

(CONTINUADO DO N.º 6)

18 — Tratemos agora do terceiro método de demonstração: o *método de redução ao absurdo*, também chamado *método analítico indirecto*. Êste e os anteriores constituem os *métodos gerais de demonstração*, por isso que, para demonstrar uma proposição *qualquer*, é forçoso adoptar um dêstes métodos, além de que o emprêgo de cada um dêles não é privativo duma classe particular de proposições. Pode até acontecer que, na mesma demonstração, se acumulem dois ou mesmo os três métodos: tratar-se-á, neste caso, duma demonstração de tipo *misto*.

O método de redução ao absurdo consiste essencialmente em demonstrar a proposição dada α, estabelecendo a falsidade da sua contraditória, α': ora (§5), se α' é falsa, α é necessàriamente verdadeira. Para demonstrar a falsidade de α', segue-se a marcha dedutiva: deduzem-se de α' novas proposições; destas, outras ainda, e assim sucessivamente, até se chegar a uma proposição ω' que seja a contraditória duma proposição ω, conhecida como verdadeira; assim ω' será falsa, e como se tem $\alpha' \rightarrow \omega'$, também α' será falsa. Quando se chega à proposição ω', manifestamente falsa, diz-se que tal conclusão é *absurda*, donde a designação do método (de redução ao absurdo); por outro lado, é visível a analogia entre êste método e o analítico, o que justifica, em parte, a segunda designação.

Como exemplo, demonstremos *em Geometria plana*, partindo do postulado das paralelas, a seguinte afirmação: «Duas rectas distintas, paralelas a uma terceira, são paralelas entre si». A contraditória da proposição a demonstrar é a seguinte: «Existem, pelo menos, duas rectas distintas $\bar{a}$ e $\bar{b}$, que, sendo paralelas a uma terceira $\bar{c}$, não são paralelas entre si»; mas notemos que, se as rectas $\bar{a}$ e $\bar{b}$ são distintas e não paralelas, se encontram num ponto $M=\bar{a} . \bar{b}$, e, assim, a última proposição é equivalente à seguinte: «Existe uma recta $\bar{c}$ e um ponto M, tais que, por M, passam duas rectas $\bar{a}$ e $\bar{b}$, distintas, paralelas a $\bar{c}$». Mas esta proposição é incompatível com o postulado das paralelas, e portanto falsa: a proposição dada é pois verdadeira.

Muitas vezes, êste método reduz-se à simples aplicação das propriedades 1) e 2) do § 5, ao teorema $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{t}$, a demonstrar: como as implicações $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{t}$ e $\mathfrak{t}' \rightarrow \mathfrak{h}'$ são equivalentes, demonstrar que se tem $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{t}$ é o mesmo que demonstrar a implicação $\mathfrak{t}' \rightarrow \mathfrak{h}'$ (parte-se da contraditória da tese e é-se conduzido à negação da hipótese).

19 — Em Matemática, não se consideram apenas teoremas, postulados e definições — verdades estabelecidas: estudam-se também problemas — verdades a estabelecer. (Modificando as convenções introduzidas no § 12, passaremos neste § a representar elementos determinados ou *conhecidos* pelas primeiras letras do alfabeto e elementos variáveis ou *desconhecidos* pelas últimas letras do alfabeto). Esquemàticamente, um problema consiste em, dada uma proposição condicional $\alpha(X)$, pedir a determinação dos elementos que satisfazem à condição $\alpha(X)$. Assim, resolver um problema não é mais do que passar duma proposição $\alpha(X)$ para outra $\beta(X)$, que seja equivalente à primeira, e que se considere *definidora* da classe dos elementos que as verificam. Por exemplo, o problema «Determinar os números x, tais que $x^2-7x+10=0$» fica resolvido quando se passa à proposição condicional «$(x=2)+(x=5)$», equivalente à que é expressa pela equação do enunciado.

Mas, tendo em vista as observações do § 9, é de prever que surjam dúvidas, quando se procura interpretar o sentido da locução «resolver um problema». Assim, os problemas que