Exemplo. $x=-8/3$, $y=2/3$, $z=1$, $t=2$ é uma solução do sistema

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-2y+z+t=-1 \\ 2x-y+2z+2t=0 \\ x-y+z+t=-1/3 \,. \end{cases}$$

O sistema reduzido escreve-se

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-2y+z+t=0 \\ 2x-y+2z+2t=0 \\ x=y+z+t=0 \end{cases}$$

cuja característica é 2. A regra de Cramer dá

$$x=-(z+t) \quad y=0 \,.$$

É um sistema fundamental de soluções

$$\begin{cases} x=-1 \quad y=0 \quad z=1 \quad t=0 \\ x=-1 \quad y=0 \quad z=0 \quad t=1 \end{cases}$$

e a solução geral do sistema reduzido é

$$x=-(\lambda+\mu) \quad y=0 \quad z=\lambda \quad t=\mu \,.$$

A solução geral do sistema proposto é

$$x=-(8/3+\lambda+\mu) \quad y=2/3 \quad z=1+\lambda \quad t=2+\mu \,.$$

5. *Bibliografia.* O leitor encontrará exposições teóricas do assunto tratado em:

B. J. Caraça — *Lições de Álgebra e Análise,* vol. I, p. 363-401; G. Vivanti — *Lezioni di Analisi Matematica,* vol. I, p. 104-116; S. Pincherle — *Lezioni di Algebra Complementare,* parte seconda, p. 81-106; E. Pascal — *I Determinanti,* p. 307-320; L. Massoutié — *Determinants, équations et formes linéaires,* p. 25-45;

exercícios resolvidos e propostos em:

G. Belardinelli — *Esercizi di Algebra Complementare,* p. 173-193; Aubert et Papelier — *Exercices d'Algèbre, d'Analyse et de Trigonométrie,* vol. I, p. 37-49; R. Noguès — *Cours de Mathématiques Spéciales sous forme de problèmes,* p. 17-19;

e, nos finais dos capítulos dedicados à exposição teórica do mesmo assunto, além das obras indicadas em primeiro lugar, em:

Niewenglowski — *Cours d'Algèbre,* vol. I, p. 214-216; C. Bourlet — *Leçons d'Algèbre Élémentaire,* p. 205-206; C. Comberousse — *Cours de Mathématiques,* vol. III, 1.ª parte, p. 302-312, 317-320; J. Haag — *Exercices du Cours de Mathématiques Spéciales,* p. 198-203.

A. SÁ DA COSTA

A LÓGICA MATEMÁTICA E O ENSINO MÉDIO

(CONTINUADO DO N.º 6)

18 — Tratemos agora do terceiro método de demonstração: o *método de redução ao absurdo,* também chamado *método analítico indirecto.* Êste e os anteriores constituem os *métodos gerais de demonstração,* por isso que, para demonstrar uma proposição *qualquer,* é forçoso adoptar um dêstes métodos, além de que o emprêgo de cada um dêles não é privativo duma classe particular de proposições. Pode até acontecer que, na mesma demonstração, se acumulem dois ou mesmo os três métodos: tratar-se-á, neste caso, duma demonstração de tipo *misto.*

O método de redução ao absurdo consiste essencialmente em demonstrar a proposição dada α, estabelecendo a falsidade da sua contraditória, α': ora (§5), se α' é falsa, α é necessàriamente verdadeira. Para demonstrar a falsidade de α', segue-se a marcha dedutiva: deduzem-se de α' novas proposições; destas, outras ainda, e assim sucessivamente, até se chegar a uma proposição ω' que seja a contraditória duma proposição ω, conhecida como verdadeira; assim ω' será falsa, e como se tem $\alpha' \longrightarrow \omega'$, também α' será falsa. Quando se chega à proposição ω', manifestamente falsa, diz-se que tal conclusão é *absurda,* donde a designação do método (de redução ao absurdo); por outro lado, é visível a analogia entre êste método e o analítico, o que justifica, em parte, a segunda designação.

Como exemplo, demonstremos *em Geometria plana,* partindo do postulado das paralelas, a seguinte afirmação: «Duas rectas distintas, paralelas a uma terceira, são paralelas entre si». A contraditória da proposição a demonstrar é a seguinte: «Existem, pelo menos, duas rectas distintas $\bar{a}$ e $\bar{b}$, que, sendo paralelas a uma terceira $\bar{c}$, não são paralelas entre si»; mas notemos que, se as rectas $\bar{a}$ e $\bar{b}$ são distintas e não paralelas, se encontram num ponto $M=\bar{a}\,.\,\bar{b}$, e, assim, a última proposição é equivalente à seguinte: «Existe uma recta $\bar{c}$ e um ponto M, tais que, por M, passam duas rectas $\bar{a}$ e $\bar{b}$, distintas, paralelas a $\bar{c}$». Mas esta proposição é incompatível com o postulado das paralelas, e portanto falsa: a proposição dada é pois verdadeira.

Muitas vezes, êste método reduz-se à simples aplicação das propriedades 1) e 2) do § 5, ao teorema $\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{t}$, a demonstrar: como as implicações $\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{t}$ e $\mathfrak{t}' \longrightarrow \mathfrak{h}'$ são equivalentes, demonstrar que se tem $\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{t}$ é o mesmo que demonstrar a implicação $\mathfrak{t}' \longrightarrow \mathfrak{h}'$ (parte-se da contraditória da tese e é-se conduzido à negação da hipótese).

19 — Em Matemática, não se consideram apenas teoremas, postulados e definições — verdades estabelecidas: estudam-se também problemas — verdades a estabelecer. (Modificando as convenções introduzidas no § 12, passaremos neste § a representar elementos determinados ou *conhecidos* pelas primeiras letras do alfabeto e elementos variáveis ou *desconhecidos* pelas últimas letras do alfabeto). Esquemàticamente, um problema consiste em, dada uma proposição condicional $\alpha(X)$, pedir a determinação dos elementos que satisfazem à condição $\alpha(X)$. Assim, resolver um problema não é mais do que passar duma proposição $\alpha(X)$ para outra $\beta(X)$, que seja equivalente à primeira, e que se considere *definidora* da classe dos elementos que as verificam. Por exemplo, o problema «Determinar os números x, tais que $x^2-7x+10=0$» fica resolvido quando se passa à proposição condicional «$(x=2)+(x=5)$», equivalente à que é expressa pela equação do enunciado.

Mas, tendo em vista as observações do § 9, é de prever que surjam dúvidas, quando se procura interpretar o sentido da locução «resolver um problema». Assim, os problemas que se propõem, geralmente, em Geometria elementar, deverão ser resolvidos, *só com auxilio da regua e do compasso.* Nêste caso, a referida locução adquire um sentido particular, e devem considerar-se como definidoras, correspondentes a problemas *elementares*, as proposições condicionais dos seguintes tipos: «$\overline{x}$ é a recta que passa pelos pontos A e B»; «[x] é a circunferência de centro em O e de raio congruente a $\overline{PQ}$»; «$X=\overline{a}\,.\,\overline{b}$»; «X é um ponto de intersecção das circunferências [a] e [b]»; «X é um ponto de intersecção de $\overline{a}$ com a circunferência [c]»; «(X, Y e Z são distintos e pertencem a $\overline{a}$). $(X\in[Y,Z])$». Dêste modo, deve considerar-se *teòricamente* resolvido um problema, quando se chega a um conjunto de proposições dêste tipo, como equivalente à condição apresentada; é óbvio que a *resolução* de tais problemas elementares não interessa à Matemática, mas apenas ao Desenho: *matemàticamente*, êsses problemas consideram-se, por sua própria natureza, já resolvidos.

Dá-se o nome de *soluções* do problema, correspondente a uma condição $\alpha(X)$, às determinações de X que verificam a condição dada: haverá problemas com várias soluções (indeterminados), uma única solução (determinados) e nenhuma solução (impossíveis). Assim, o problema «Dados A e B, determinar X, de modo que $\overline{AX}\simeq\overline{BX}\simeq\frac{1}{m}\overline{AB}$» admite duas soluções, no plano, e uma infinidade de soluções, no espaço, se $m<2$; admite uma única solução, se $m=2$; e não admite solução nenhuma, se $m>2$. Mas é ainda manifesto que o número de soluções dum problema está condicionado pelo sentido que se atribui à locução «resolver um problema»; assim, há problemas, como o da trisecção do ângulo, o da duplicação do cubo e o da quadratura do círculo, que, na *Geometria da régua e do compasso*, não admitem solução nenhuma, embora sejam resolúveis por outros processos.

Para resolução de problemas de Matemática existem dois métodos gerais: o *analítico*[1] e o *sintético*. Consiste o primeiro em reduzir a resolução do problema proposto à de outros que pareçam mais simples, cuja resolução se reduz, por sua vez, à de outros ainda, e assim sucessivamente, até se chegar a problemas de resolução imediata; é êste o método que se usa, por exemplo, na resolução das equações, com a aplicação dos princípios da equivalência. Pelo método sintético, resolvem-se, uns a seguir aos outros, vários problemas conhecidos, de modo que, ao resolver o último, fique também resolvido o problema proposto. Não entraremos em pormenores a respeito dêstes métodos, nem sequer apresentaremos exemplos da aplicação de cada um dêles à resolução de problemas. Limitar-nos-emos a observar que deve haver todo o cuidado em estabelecer a equivalência entre a condição final, $\omega(X)$, definidora das soluções, e a condição dada, $\alpha(X)$; em particular, se $\alpha(X)\longrightarrow\omega(X)$, sem que se tenha $\omega(X)\longrightarrow\alpha(X)$, são introduzidas *soluções estranhas*; ao passo que, se $\omega(X)\longrightarrow\alpha(X)$, sem que se verifique a implicação inversa, serão *omitidas* soluções.

Antes de terminar, desejamos formular algumas conclusões. A exposição que fizemos não é tão desenvolvida que mostre todos os recursos da Lógica matemática (ou simbólica), na análise do raciocínio matemático; nem tão reduzida, que possa, sem qualquer simplificação prévia, ser utilizada no ensino médio. Foi nosso intento apresentar sugestões, de preferência a indicar um modêlo definitivo para o ensino. Uma conclusão, porém, se impõe, entre tôdas: a dificuldade dum estudo criterioso dos métodos gerais da Matemática, e duma justa compreensão do encadeamento das proposições no raciocínio matemático, sem recorrer à Lógica simbólica, e sem uma cuidadosa preparação que desenvolva no aluno hábitos de rigorismo lógico, libertando-o progressivamente dos processos intuïtivos.

Algumas noções, como as de produto lógico e de soma lógica, podem ser úteis no estudo das desigualdades.

Por outro lado, a Aritmética, com a simplicidade dos seus conceitos e das suas propriedades, constitui, mais do que a Geometria, um campo privilegiado para a aplicação da Lógica matemática.

JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

[1] Também chamado método *do problema resolvido*, porque se começa por supor já resolvido o problema, a-fim-de mais fàcilmente se descobrir o processo de resolução.

EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

ANO DE 1940

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geógrafo.

PONTO N.º 2

653 — Determine as soluções inteiras e positivas da equação $3x+4y=26$. R: *Da equação tira-se* $x=\frac{26-4y}{3}=8-y+\frac{2-y}{3}$ *o que nos mostra que um par de soluções é* $x_1=6$, $y_1=2$ *e as soluções gerais em números inteiros são dadas pelas equações* $x=6+4n$ *e* $y=2-3n$; *só existem soluções inteiras e positivas para os valores de* n *iguais a* 0 *e* -1, *o que dá os pares de valores* $x_1=6$, $y_1=2$ *e* $x_2=2$, $y_2=5$. J. P.

654 — Defina arranjos e combinações de *n* objectos tomados *p* a *p*. Forme os arranjos dos 3 números 1, 2 e 3 tomados 2 a 2. R: *Chamam-se arranjos aos agrupamentos de objectos que diferem entre si sòmente pela natureza. Entende-se por objectos de natureza diferente os que não são iguais. Os arranjos pedidos são* 12, 21, 31, 13, 23 *e* 32. J. P.

655 — Forme a equação do 2.º grau cujas raízes são $+i$ e $-i$. R: $x^2+1=0$. J. P.

656 — A corda de uma circunferência de raio igual a $16^{m},46$ tem por comprimento $12^{m},39$. Calcule, recorrendo ao cálculo logarítmico, o ângulo ao centro cujos lados passam pelos extremos da corda. R: *A relação que liga a corda* l *com o ângulo ao centro* α *correspondente é* $l=2R\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}$ *e portanto será*

$$\log\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}=\log l+\mathrm{colog}\,2+\mathrm{colog}\,R=1,09307-\bar{1},69897+\bar{2},78357=$$

$=\bar{1},57561$ *donde* $\frac{\alpha}{2}=22^{o}\,6'\,30'',97$ *e* $\alpha=44^{o}\,13'\,1'',94$. J. P.