Excluídas as duas últimas soluções, por serem complexas, as duas primeiras correspondem aos dois pontos da hipérbole mais próximos da origem, necessàriamente.

728 — A curva $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=t^2-1 \\ z=4t+2 \end{cases}$ será plana? R: *A curva proposta é plana porque a torsão é nula em todos os seus pontos, ou, o que é o mesmo, porque é nulo o determinante*

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2t & 2t & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

As soluções dos exercícios 726 a 728 são do Dr. A. Sá da Costa.

FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. P. — Exame final, Julho de 1940

729 — Seja A um operador linear definido no domínio D_A de um espaço de Hilbert. A condição necessária e suficiente para que exista, em D_A, uma base do espaço (um sistema orto-normado completo), é que D_A seja denso em todo o espaço.

730 — Seja H um operador de Hermite e $\mathcal{M}$ um dos seus espaços próprios. Demonstrar que H comuta com o operador $P_{\mathcal{M}}$ — projecção ortogonal sôbre $\mathcal{M}$.

731 — Sejam φ, ψ dois vectores normados independentes de um espaço de Hilbert. Determinar as constantes λ e os vectores fundamentaisdo operador $a\,.\,P_{[\varphi]}+b\,.\,P_{[\psi]}$. ¿Qual é o grau de multiplicidade de cada constante? Generalizar o problema a uma combinação linear qualquer de projecções.

Nota: Considerar separadamente as duas hipóteses: $\lambda=0$, $\lambda\neq 0$.

(Exercícios extraídos de «Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik — v. Neumann»). R. L. G.

F. C. P.—Exame final, Outubro de 1940

732 — Seja A um operador de Hermite com uma base (sistema orto-normado completo) de vectores fundamentais. Demonstrar que a continuïdade de A *é* equivalente à condição $|\lambda_i| \leq c$, $(i=1, 2, \cdot\cdot)$.

733 — Supondo que A é *também* definido-positivo, demonstrar que $\sum_{i=1}^{\infty}(A\varphi_i, \varphi_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i$, seja qual fôr o sistema orto-normado (completo) φ_i.

734 — Supondo que $E(\lambda)$ — decomposição da unidade relativa ao operador de Hermite A — é uma função contínua de λ no intervalo fechado $(\mu_1 \leq \lambda \leq \mu_2)$, deduzir a ortogonalidade: $\{E(\mu_2)-E(\mu_1)\}\,\{E(\lambda)-E(\lambda-0)\}=0$.

Associando a êste resultado a hipótese de A admitir uma base de vectores fundamentais, concluir que $E(\lambda)$ se mantém constante no intervalo (μ_1, μ_2). Classificar o espectro de A.

¿Quais são os valores possíveis de grandeza física — A? ¿Qual é a probabilidade dêsses valores? ¿Tratar-se-á de uma grandeza contínua?

Nota — Para resolver o exercício 733 basta desenvolver $(A\varphi_i, \varphi_i)$ segundo a base de vectores fundamentais de A.

No exercício 734 considerar separadamente os intervalos $(\lambda<\mu_1)$, $(\mu_1 \leq \lambda \leq \mu_2)$ e $(\lambda>\mu_2)$, recorrendo sempre às propriedades características da projecção $E(\lambda)$.

Todos estes exercícios foram extraídos da obra de Neumann, anteriormente citada. R. L. G.

PROBLEMAS PROPOSTOS

735 — O problema n.º **324** (número 3 da *Gazeta de Matemática*, pg. 14) pode resolver-se por diferentes processos. Um dêsses processos conduz ao seguinte conjunto de soluções

$$x=\frac{4n+3}{6}\pi, \quad x=\frac{1-4n}{6}\pi, \quad x=\frac{12n\pm 1}{18}\pi, \quad x=\frac{12n+7}{18}\pi,$$

$x=\dfrac{12n+5}{18}\pi$. Porém, seguindo um outro caminho na resolução do mesmo problema, obtêm-se as soluções: $x=\dfrac{4n\pm 1}{6}\pi$, $x=\dfrac{4n\pm 1}{18}\pi$. Demonstrar a equivalência dos dois resultados.

736 — Sabe-se que $\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}$. Demonstrar que a proposição anterior se generaliza tomando a forma

$$\binom{n+t}{r}=\sum_{k=0}^{t}\binom{t}{k}\binom{n}{r-k} \quad (t \leq r).$$

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Agros — Revista dos Estudantes de Agronomia. Ano 23 — n.º 6, Ano 24 — n.º 1.

Portugaliae Mathematica — Revista trimestral — Faculdade de Ciências — Lisboa — Portugal. Vol. 2 — 1941 — Fascículo 1 — Março. Fascículo 2 — Junho.

Técnica — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T., n.º 119 (Abril de 1941), n.º 120 (Maio de 1941). O n.º 120 contém os enunciados dos pontos dos exames de aptidão ao I. S. T. realizados nos dois últimos anos.

— *Separata da* **Revista da Faculdade de Ciências** *da U. L.* — *Sôbre um problema de Tchebycheff* — Hugo Ribeiro.

Conceitos fundamentais da Matemática — Bento de Jesus Caraça — Biblioteca Cosmos — Lisboa. 1941 — Preço: 2$50.

RECTIFICAÇÕES

Na *resolução* do problema n.º 453 (*G. M.* n.º 5) onde se lê $\sqrt{\dfrac{5a^2+2a}{3}}$, 10°, $\sqrt{\dfrac{5a^2+2a}{3}}\operatorname{sen} 10^\circ$, escreva-se respectivamente: $a\dfrac{\sqrt{21}}{3}$, $\operatorname{arc\,sen}\dfrac{\sqrt{7}}{14}$, $a\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

H. R.

REFERÊNCIAS

A Direcção da «Gazeta de Matemática» agradece muito reconhecida as referências feitas por: *Diário de Lisboa*, *Diário de Notícias*, *Jornal do Comércio e das Colónias* e *Jornal de Notícias do Pôrto*.