26·06·

2.º ANO - N.º 6 — ABRIL DE 1941

GAZETA DE MATEMÁTICA

Redacção e Administração: Faculdade de Ciências — Rua da Escola Politécnica — Lisboa

EDITOR: JOSÉ DUARTE DA SILVA PAULO

Composto e impresso na Soc. Industrial de Tipografia, Limitada R. Almirante Pessanha, 3 e 5 - Lisboa

O TEOREMA DE ROUCHÉ E A RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Pressupomos o leitor de posse dos resultados fundamentais da teoria dos determinantes, dos conceitos de matriz e de característica e das propriedades elementares desta.

1. *Determinação da característica duma matriz.* A determinação metódica da característica duma matriz baseia-se no

Teorema [1] — *É condição necessária e suficiente para que a matriz* $((a_{ij}))$ $(i=1,2,\cdots n\,;\ j=1,2,\cdots m)$ *tenha característica* k *que exista um determinante da matriz, de ordem* k *não nulo e que sejam nulos os* $(n-k).(m-k)$ *determinantes de ordem* $k+1$ *obtidos daquele orlando-o com uma linha e uma coluna da matriz, das que nêle não entram.*

Exemplo: Seja a matriz

$$\mathbf{A}=\left\|\begin{matrix}1&2&-1&5&0&1\\3&0&-2&-1&1&2\\2&-9&6&2&0&-6\\4&2&-3&4&1&3\\1&-11&7&-3&0&-7\end{matrix}\right\|.$$

A sua característica é igual à da matriz

$$\mathbf{B}=\left\|\begin{matrix}1&2&-1&5&0&1\\3&0&-2&-1&1&2\\2&-9&6&2&0&-6\end{matrix}\right\|$$

obtida de **A** pela supressão das linhas 4.ª e 5.ª cujos elementos são combinações lineares dos correspondentes das três primeiras linhas, de coeficientes $1,1,0$ e $-1,0,1$, respectivamente.

A característica da matriz **B** e, portanto, a de **A** é igual à da matriz

$$\mathbf{C}=\left\|\begin{matrix}1&2&-1&5&0\\3&0&-2&-1&1\\2&-9&6&2&0\end{matrix}\right\|$$

que se obteve de **B** pela supressão da última coluna, cujos elementos são proporcionais aos correspondentes da 3.ª coluna.

A matriz **C** tem um elemento não nulo, por exemplo o da 1.ª linha e 1.ª coluna, logo, a sua característica é, pelo menos 1.

Mas, o determinante obtido do elemento considerado orlando-o com a 2.ª linha e a 2.ª coluna de **C**, $\Delta=\begin{vmatrix}1&2\\3&0\end{vmatrix}=-6$ é diferente de zero e a característica da matriz **C** é, pelo menos, 2.

Orlemos o determinante Δ com a 3.ª linha e a 3.ª coluna de **C**, vem $\Delta_p=\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&0&-2\\2&-9&6\end{vmatrix}=-35.$

Logo, a característica da matriz **C** é, pelo menos, 3 e, é 3, porque desta não pode obter-se determinantes de ordem superior a 3. O determinante Δ_p pode ser considerado determinante principal da matriz **A**.

2. *Resolução de sistemas de equações lineares não homogéneas.* Dá-se o nome de sistema de equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, \cdots x_n$, a todo o sistema da forma

$$1)\quad\begin{cases}a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\cdots+a_{1n}\,x_n=b_1\\a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+\cdots+a_{2n}\,x_n=b_2\\\cdots\\a_{m1}\,x_1+a_{m2}\,x_2+\cdots+a_{mn}\,x_n=b_m\end{cases}$$

ou, condensadamente, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j=b_i \qquad (i=1,2,\cdots m)$

onde a_{ij} e b_i são expressões que não contêm as incógnitas. A a_{ij} dá-se o nome de *coeficientes* e a b_i o de *têrmo independente.*

As equações do sistema 1) são *homogéneas* se $b_i=0$ $(i=1,2,\cdots n)$ e *não homogéneas* se os b_i não são simultâneamente nulos. Só o segundo caso nos interessa, por agora.

Diz-se *solução* do sistema todo o conjunto de n números $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ que substituidos nas incógnitas das equações do sistema as converte, simultâneamente, em identidades.

O sistema 1) diz-se *compatível* (*possível*) ou *incompatível* (*impossível*) se admite ou não soluções. Prova-se que o sistema 1) se fôr compatível, ou tem uma solução única, ou uma infinidade, e dir-se-á então *determinado* ou *indeterminado.* Introduz-se o conceito de grau de indeterminação.

Designaremos por **A** a matriz $((a_{ij}))$ $(i=1,2,\cdots m\ j=1,2,\cdots n)$ dos coeficientes das incógnitas e por **B** a matriz dos coeficientes e dos termos independentes.

Prova-se que, se fôr k a característica da matriz **A**, a característica da matriz **B**, ou é k, ou $k+1$. Aos determinantes de ordem $k+1$ da matriz **B**, obtidos do determinante principal da matriz **A**, que contenham a coluna dos termos independentes, dá-se o nome de *característicos.* Só quando um dos característicos, pelo menos, não fôr nulo a característica da matriz **B** é $k+1$.

Teorema de Rouché [2] — *É condição necessária e suficiente para que o sistema* 1) *seja compatível que as características das matrizes* **A** *e* **B** *sejam iguais (ou, o que é o mesmo, os característicos, se existirem, sejam todos nulos), sendo compatível, o sistema é determinado ou indeterminado se a característica* k *das matrizes* **A** *e* **B** *fôr igual ou inferior ao número* n *de incógnitas* [3].

---

[1] L. Kronecker (1823-1891). V. demonstração em Bento de Jesus Caraça — *Lições de Álgebra e Análise*, vol I, págs. 274-276.

[2] E. Rouché (1832-1910). V. demonstração em B. J. Caraça, Ob. Cit. pág. 383-387.

[3] É a diferença, sempre positiva, $n-k$ que se denomina *grau de indeterminação.*

Na hipótese da compatibilidade, se fôr k a característica das matrizes **A** e **B**, prova-se que a resolução do sistema 1) se reduz à do sistema

$$2)\quad \begin{cases} a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\cdots+a_{1n}\,x_n=b_1\\ \cdots\\ a_{k1}\,x_1+a_{k2}\,x_2+\cdots+a_{kn}\,x_n=b_k\end{cases}$$

ou abreviadamente, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j=b_i \quad (i=1\,,2\,,\cdots n)$

que se diz *principal* e cuja solução ou soluções satisfazem às restantes equações de 1) (equações *não principais*), as quais são combinações lineares das de 2).

No caso geral, o sistema 2) escrever-se-á

$$2)\quad \begin{cases} a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\cdots+a_{1k}\,x_k=c_1\\ \cdots\\ a_{k1}\,x_1+a_{k2}\,x_2+\cdots+a_{kk}\,x_k=c_k\end{cases}$$

ou $\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\,x_j=c_i \quad (i=1\,,2\,,\cdots k)$ com

$c_i=b_i-(a_{ik+1}\,x_{k+1}+\cdots+a_{in}\,x_n)$, se fôr $\Delta_p=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1k}\\ \cdots\\ a_{k1}\cdots a_{kk}\end{vmatrix}\neq 0$

e, portanto, susceptível de ser tomado como determinante principal.

Ter-se-á $c_i=b_i$ sempre que fôr $n=k$, isto é, sempre que o sistema, sendo compatível, fôr determinado.

Às incógnitas $x_1\,,x_2\,,\cdots x_k$ dá-se a designação de *principais* e às restantes $x_{k+1}\,,\cdots x_n$ a de *não principais.*

A solução ou soluções do sistema 2) são dadas pela *Regra de Cramer* [1] — *O valor de cada incógnita é dado por uma fracção cujo denominador é o determinante principal* Δ_p *e cujo numerador é o determinante obtido de* Δ_p *pela substituição da coluna dos coeficientes da incógnita pela coluna dos 2.os membros das equações de* 2).

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta_p}\qquad (i=1\,,2\,,\cdots k)\,.$$

Exemplo I. Estudar o sistema

$$\begin{cases} x-y+2z-t=1\\ x+y-z-2t=2\\ 2x+z-3t=2\\ 2y-3z-t=1.\end{cases}$$

A característica da matriz **A** é 2. A característica da matriz **B** é 3, visto que dos dois característicos um é diferente de zero:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&2\\2&0&2\end{vmatrix}=-2\neq 0\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&2\\0&2&1\end{vmatrix}=0.$$

O sistema dado é incompatível. Não o seria o sistema que se obtém do proposto pela supressão da 3.ª equação.

Exemplo II. Estudar o sistema

$$\begin{cases} x+y-z=1\\ 2x-3y+z=2\\ 4x-y-z=7\end{cases}$$

e interpretar geomètricamente o resultado. Determinar as direcções das arestas da figura definida no espaço pelas equações do sistema.

A característica da matriz **A** é 2 e a da matriz **B** é 3, pois o único característico é

$$\Delta_c=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-3&2\\4&-1&7\end{vmatrix}=-15\neq 0\,.$$

O sistema é incompatível.

Mas, os sistemas formados pelas equações do sistema proposto tomadas duas a duas são todos compatíveis, visto que não existem característicos.

As equações do sistema proposto são as de três planos que se intersectam dois a dois. A figura é um prisma cujas arestas têm a direcção comum $\delta\,(2\,,3\,,5)$.

Exemplo III. Estudar o sistema

$$\begin{cases} x-2y+3z+t=10\\ x+y-z=1\\ 3x+z+t=12\,.\end{cases}$$

A característica da matriz **A** é 2 e a da matriz **B** é também 2, em virtude do anulamento do único característico

$$\Delta_c=\begin{vmatrix}1&-2&10\\1&1&1\\3&0&12\end{vmatrix}=0\qquad \Delta_p=\begin{vmatrix}1&-2\\1&1\end{vmatrix}=3.$$

O sistema é compatível e indeterminado de grau 2.

A regra de Cramer, conduz-nos a

$$x=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}10-3z-t&-2\\1+z&1\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\,(12-z-t)$$

$$y=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1&10-3z-t\\1&1+z\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\,(-9+4z+t)\,.$$

Exemplo IV. Estudar o sistema

$$\begin{cases} x+y+z=0\\ x-y+z=1\\ x+2y-z=2\\ 3x+2y+z=3\,.\end{cases}$$

A característica da matriz **A** é 3

$$\Delta_p=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&2&-1\end{vmatrix}=4.$$

A da matriz **B** é também 3, o único característico é nulo

$$\Delta_c=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&-1&1&1\\1&2&-1&2\\3&2&1&3\end{vmatrix}=0$$

visto que a sua 4.ª linha é a soma das 3 primeiras.

$$x=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}0&1&1\\1&-1&1\\2&2&-1\end{vmatrix}=\frac{7}{4}\qquad y=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&2&-1\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

$$z=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&2&2\end{vmatrix}=-\frac{5}{4}.$$

Exemplo V. Discutir e resolver o sistema

$$\begin{cases} (a+b)\,x+(a-b)\,y=a^2+b^2\\ (a-b)\,x+(a+b)\,y=a^2-b^2\,.\end{cases}$$

Interpretação em geometria analítica no espaço. (I. S. T. — Mat. Gerais, 1.º exame de freq. de 1938-39 — V. *Gaz. Mat.* exerc. 155).

As matrizes **A** e **B** têm, em qualquer hipótese, a mesma característica: 1 se $a=0$ ou $b=0$ e 2 se $a\,,b\neq 0$. Excluímos o caso, sem interêsse, de $a=b=0$.

O sistema proposto é, portanto, sempre compatível. No caso de $a\,,b\neq 0$, a regra de Cramer conduz-nos a $x=a+b$, $y=a-b$.

Se se tem $a=0$ ou $b=0$, as equações do sistema não são distintas reduzem-se a $x+y=a$ ou $x-y=b$, plano perpendicular a Oxy.

Se $a\,,b\neq 0$, as equações do sistema são as de dois planos perpendiculares ao plano Oxy que formam um diedro cuja aresta tem por equações $\begin{cases} x=a+b\\ y=a-b\,.\end{cases}$

(Continua) A. SÁ DA COSTA.

[1] G. Cramer (1704-1752). V. a dedução em B. J. Caraça, Ob. cit., pág. 375-382.