A LÓGICA MATEMÁTICA E O ENSINO MÉDIO

(CONTINUADO DO N.º 5)

9 — Dada uma proposição condicional $\alpha(X)$, suponhamos que existe uma, e uma só, determinação de X, que representaremos por X^*, para a qual a proposição $\alpha(X)$ é verdadeira [1]. Dêste modo, a proposição $\alpha(X^*)$, incondicionalmente verdadeira, traduz uma propriedade exclusiva de X^*, e será portanto possível *definir* o elemento X^* à custa dessa mesma propriedade: «X^* é o elemento que satisfaz à condição $\alpha(X^*)$», ou, em termos de Lógica matemática, «$(X=X^*)\equiv\alpha(X)$» [2]. Obtém-se, por êste processo, uma *definição lógica* da entidade X^*. Por exemplo, «X é o sucessor de 4» é uma propriedade que pode utilizar-se para definir o número convencionalmente representado pelo símbolo 5, e assim teremos, *por definição*, «5 é o sucessor de 4».

Para que, segundo o processo indicado, uma dada proposição $\alpha(X)$ possa conduzir à definição dum elemento, é evidentemente necessário que *exista* uma, e *uma só*, entidade X^*, que satisfaça à condição $\alpha(X^*)$. Tôda a definição dum elemento deve, portanto, lògicamente, ser precedida duma proposição de *existência* e de *unicidade*. É, contudo, natural admitir a possibilidade de um mesmo elemento ser definido de modos diferentes, isto é, utilizando proposições condicionais distintas; assim, a anterior definição (do número 5) será equivalente à seguinte: «$(X=5)\equiv(X$ é o m. d. c. de 20 e 15$)$». Haverá portanto, entre as propriedades dum ser, uma que se toma, *um tanto arbitràriamente*, como propriedade definidora (em geral, produto lógico de um conjunto de propriedades), sendo as restantes consideradas apenas conseqüências da definição. Convém, evidentemente, aceitar como definidora a propriedade que se *afigure* mais simples, — mas compreende-se que, muitas vezes, se torne difícil, até impossível, a determinação duma tal propriedade elementar [3].

Notemos agora que, além das definições de elementos, se devem considerar ainda as definições de *classes* (ou de *conjuntos*). O processo é análogo ao anterior: define-se uma classe (ou um conjunto), indicando uma propriedade comum a todos os elementos dessa classe (ou dêsse conjunto), e só a êsses. Exemplos: I) Definição de quadrado perfeito: «$(x$ é *um quadrado perfeito*$)\equiv$(Existe um inteiro y tal que $x=y^2$)»; II) Definição de mediatriz dum segmento: «$(X$ é *um ponto da mediatriz do segmento* $\overline{AB})\equiv \text{dist}\,(A,X)=\text{dist}\,(B,X)$)». Neste caso, as condições de existência e de unicidade deixam de constituir um motivo de preocupação, visto que o conjunto dos elementos que satisfazem a uma dada proposição condicional $\alpha(X)$ *existe sempre e é único*; pode apenas tal conjunto não conter elemento nenhum (recebe então o nome de *conjunto vazio*) [4]. Assim, existe, e é determinado, o conjunto dos números primos múltiplos de 4, embora tal conjunto seja vazio; anàlogamente, é vazia a classe dos triângulos rectângulos equiláteros.

Devemos, finalmente, referir-nos a definições de *operadores* ou *relações*. Exemplo: Por meio da equivalência «(A recta x é *paralela à* recta $y)\equiv$(As rectas x e y pertencem ao mesmo plano) (Não existe nenhum ponto comum a x e a y)», fica definida a relação «paralelo a», entre duas rectas. Não deixaremos, contudo, de afirmar que se pode, mediante um artifício muito simples, fazer entrar êste tipo de definições, no precedente.

Como se vê, uma definição não é, no fundo, mais do que a atribuïção dum nome ou, o que vem a dar o mesmo, a representação por meio dum símbolo, da entidade ou da classe de entidades, que gozam duma certa propriedade: o objectivo é, pois, resumir, por meio dum único símbolo, o que, antes disso, só era exprimível por meio de vários símbolos. Assim, as definições são proposições, incondicionalmente verdadeiras por nossa própria *deliberação*, isto é, por *convenção*, e têm por fim, não só a economia de tempo, como ainda maior clareza de expressão: é, sem dúvida, muito mais cómodo dizer «circunferência» do que «conjunto dos pontos dum plano situados a uma mesma distância de um outro ponto dêsse plano», principalmente, se notarmos que esta noção é de uso correntíssimo em Geometria.

10 — Em qualquer teoria matemática, construída segundo os preceitos da Lógica, começa-se por fixar um certo número de noções (as *noções primitivas*) e um certo número de proposições (os *postulados*), de modo que satisfaçam às seguintes condições: 1) Todas as entidades consideradas nessa teoria se podem definir à custa das noções primitivas; 2) Todas as proposições categóricas que, na mesma teoria, se formulam como verdadeiras (excepto as definições) são conseqüências lógicas dos postulados; 3) Os postulados são compatíveis, isto é, não conduzem a contradição; 4) Nenhuma noção primitiva se pode reduzir, por meio duma definição, às restantes noções primitivas; 5) Nenhum postulado se pode deduzir dos restantes postulados [5]. Em virtude destas condições, os conceitos primitivos não serão susceptíveis de definição, e os postulados serão *indemonstráveis*: uns e outros se aceitam *geralmente*, como dados fornecidos pela *intuïção*, no contacto com a realidade sensível. Assim, por exemplo, na Geometria que se estuda nos liceus, ou Geometria euclidiana, *é uso* tomarem-se, como primitivas, entre outras, as idéias de «ponto», «recta», «plano», «situado entre»; e como postulados, entre outras, as seguintes proposições: «Por dois pontos distintos passa uma recta, e uma só»; «Dados três pontos distintos, pertencentes a uma recta, existe um, e um só dêles, situado entre os restantes»; «Por um ponto exterior a uma recta passa uma, e uma só, paralela a essa recta».

Além dos postulados, consideram-se em Matemática mais dois tipos de proposições: as *definições nominais* e os *teoremas*. As primeiras, de que já tratámos desenvolvidamente no

---

[1] Pode comparar-se $\alpha(X)$ a uma equação que admite uma solução única X^*; dêste modo, $\alpha(X^*)$ corresponde à identidade em que é convertida essa equação, quando se faz $X=X^*$.

[2] Como já fizemos anteriormente (obs. 2), § 7), usamos o sinal $=$ para exprimir *identidade*; assim «$a=b$» significa que a representa *o mesmo* elemento que b.

[3] A propriedade com que, històricamente, uma entidade se dá a conhecer *pela primeira vez*, nem sempre é a mais indicada para uma definição lógica dessa entidade: é o que sucede por exemplo, com o número π.

[4] Há nisto, é claro, apenas uma convenção: uma extensão natural do conceito de conjunto, em vista da comodidade de linguagem que daí resulta.

[5] As condições 4) e 5) não são indispensáveis para o desenvolvimento lógico da teoria; compreende-se, todavia, a vantagem que há em reduzir a um *mínimo* o número das entidades que não se definem e o das proposições que não se demonstram, sendo óbvio que tal mínimo *existe necessàriamente*.

§ anterior, introduzem novas noções, à custa dos conceitos primitivos, com o objectivo de contribuir para a brevidade e a clareza do discurso. Os teoremas são aquelas proposições, distintas dos postulados e das definições que, segundo a condição 2), se podem deduzir dos postulados, isto é, que são susceptíveis de *demonstração*.

Pode suceder que, dado um teorema α_1, não só seja possível deduzir α_1 dos postulados admitidos, como até exista um postulado α, que seja implicado por α_1, quando se admitem os restantes postulados; isto é, as proposições α e α_1 serão, em tais condições, equivalentes, e poderá substituir-se α por α_1. Isto mostra que a escôlha das proposições que hão-de figurar como postulados, numa dada teoria, apresenta um certo grau de arbitrariedade: devem preferir-se, é claro, as proposições de enunciado mais simples, mas podem surgir neste caso, as mesmas hesitações que apontámos, a respeito das definições. Análoga liberdade de escôlha se verifica para as noções primitivas. Por exemplo, em vez do conceito de «recta», podem tomar-se como primitivos o conceito de «distância (entre dois pontos)», o de «direcção», etc. Anàlogamente, demonstra-se que o postulado das paralelas (Por um ponto exterior a uma recta passa uma paralela a essa recta, e uma só) se pode substituir pelo teorema, segundo o qual a soma dos ângulos internos dum triângulo é igual a um ângulo raso (a última proposição passaria então a ser um postulado e a primeira, um teorema).

Em virtude do que dissémos nos §§ anteriores, fica perfeitamente esclarecido o significado de expressões, tais como «hipótese» e «tese» (dum teorema ou dum postulado), «teoremas recíprocos», etc.

Devemos ainda notar que não existe uma distinção fundamental entre definições e postulados: êstes são apenas, como já se tem dito, definições disfarçadas, que limitam a indeterminação dos conceitos primitivos.

11 — É normal, no ensino médio, para demonstrar (e até para enunciar) um teorema de Geometria, fazer uso de figuras, cujo papel não é, ùnicamente o de facilitar a compreensão da matéria, mas ainda o de substituir uma parte importante da demonstração (ou do enunciado): omitem-se muitas passagens, apenas porque são sugeridas, intuïtivamente, pela figura. Perde-se, dêste modo, em precisão, o que se ganha em clareza, — se pode chamar-se *claro* ao que é *superficial* [1]. As propriedades que, intervindo na demonstração dum teorema, não são geralmente invocadas, são as que envolvem os conceitos de «pertence a» e «situado entre», — chamadas ***propriedades topológicas***. Por exemplo, o facto de um ponto ser interior ou exterior a um polígono é uma propriedade topológica. Têm de específico estas propriedades não serem alteradas quando, por exemplo, se substituem segmentos iguais por segmentos diferentes, ângulos rectos por ângulos não-rectos, segmentos de recta por convenientes linhas curvas, etc. — contanto que a posição relativa dos pontos seja respeitada [2]. Daí o dizer-se que «a Geometria é a arte de raciocinar sôbre figuras mal feitas».

Para que uma demonstração seja impecável, do ponto de vista lógico, é necessário que não dependa, de maneira nenhuma, da figura utilizada, de modo que, abstraindo desta, a demonstração não seja afectada em qualquer pormenor. Não pretendemos, com isto, insinuar que se deva pôr completamente de parte a figura: pelo contrário, há grande vantagem no seu uso (devidamente acautelado), como poderoso auxiliar da intuïção. Não deixaremos, contudo, de aconselhar, como óptimo exercício para combater os hábitos de raciocínio provenientes do uso imoderado das figuras, fazer a demonstração de alguns teoremas, sem recorrer à imagem geométrica intuïtiva. É, porém, necessário, para tal conseguir, além dum conhecimento perfeito de tôdas as propriedades que intervêm na demonstração, o emprêgo dum sistema de notações, muito mais minucioso do que os ordinàriamente adoptados (não esqueçamos que as notações correspondem a verdadeiras definições, e qual o papel simplificador das definições). Os símbolos vêm dêste modo substituir o desenho, o que representa um progresso decisivo no sentido da depuração lógica dos métodos.

12 — Vamos, neste §, introduzir algumas convenções que teremos necessidade de utilizar. Como símbolos representativos de entidades, empregaremos letras do alfabeto latino em redondo: maiúsculas $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \cdots)$, para os pontos; minúsculas, $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{x}, \cdots)$, para os números; minúsculas encimadas dum traço $(\bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{a}}, \cdots)$, para as rectas; minúsculas entre colchetes $([\mathrm{y}], [\mathrm{b}], \cdots)$, para as figuras geométricas em geral. Em particular usaremos letras latinas minúsculas, em itálico, $(a, x, \cdots)$, para designar números inteiros. Quando nada se diga em contrário, estes símbolos representarão seres indeterminados, dentro dos limites impostos pelas condições anteriores: assim, A e B designarão dois pontos *quaisquer, independentes* (coincidentes ou distintos); resulta ainda das convenções estabelecidas que proposições, tais como «A, P e X são pontos», «$\bar{\mathrm{r}}$ e $\bar{\mathrm{y}}$ são rectas» «k é um número» são proposições reconhecidas, uma vez por tôdas, como incondicionalmente verdadeiras, e, por isso mesmo, dispensáveis nos enunciados das outras proposições. O sinal $'$ será aqui utilizado com a mesma função que se lhe atribui vulgarmente (excepto quando se aplica às proposições, caso em que exprime negação).

Em vez do têrmo «igualdade» aplicado às figuras geométricas, usaremos o de «congruência»: «$[\mathrm{a}]$ é congruente a $[\mathrm{b}]$» significa o mesmo que, no sentido ordinário, «$[\mathrm{a}]$ é igual a $[\mathrm{b}]$»; e escreveremos, para exprimir êste facto, $[\mathrm{a}] \cong [\mathrm{b}]$, em vez de $[\mathrm{a}] = [\mathrm{b}]$. O sinal $=$ fica reservado para exprimir identidade. Notemos que, no caso dos números, «igualdade» é sinónimo de «identidade».

Adoptaremos ainda as seguintes notações: $\in$ (*pertence a*); $\neq$ (*distinto de*); $\|$ (*paralelo* ou *paralela a*); AB (recta def. por A e por B); $\overline{\mathrm{AB}}$ (segmento de extremos A e B); $\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ (semi-recta que tem por origem A e que passa por B); $\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{B}^{-1}$ (semi-recta oposta a $\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$); $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$ (ângulo convexo cujos lados são $\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{A}$ e $\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$) $\bar{a} . \bar{b}$ (ponto de intersecção das rectas $\bar{a}$ e $\bar{b}$); $[\mathrm{ABC}]$ (triângulo de vértices A, B e C); $\mathrm{A} \in [\mathrm{P}, \mathrm{Q}]$ (A está situado entre P e Q). Convém ainda ter presentes algumas regras: num triângulo $[\mathrm{ABC}]$ o ângulo *oposto* ao lado $\overline{\mathrm{AB}}$ é $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{C}}\mathrm{B}$ (as letras exteriores

[1] É inteiramente justificável a orientação *intuïtivo-racional*, que se imprime ao ensino da Geometria, nesta fase de iniciação (ainda não vai longe o tempo em que se ensinava Euclides, à maneira de Euclides...); o que não podemos aceitar, é que muitas vezes se apresente como demonsração, o que *não é demonstração*, e como definição... o que *nada define*.

[2] Poincaré dá intuïtivamente a idéia de «propriedade topológica», dizendo que são topológicas aquelas propriedades duma figura que se conservam, mesmo quando esta é grosseiramente reproduzida por uma criança.

são as que designam os vértices do lado opôsto); AOB^{-1} será um ângulo adjacente a $A\hat{O}B$ (lado comum $\hat{O}A$); $A^{-1}\hat{O}B^{-1}$, o ângulo verticalmente opôsto a $A\hat{O}B$; AOA^{-1}, um ângulo raso, etc.

13 — Podemos agora, por meio do simbolismo adoptado, enunciar algumas proposições da Geometria euclidiana:

$\pi: ([a] \cong [b]).([b] \cong [c]) \rightarrow ([a] \cong [c])$, (Propriedade transitiva da congruência entre figuras geométricas).

$\theta: (A,B,C \text{ não são colineares}).(A\hat{B}C > A\hat{C}B) \rightarrow (\overline{AC} > \overline{AB})$[1], (Em qualquer triângulo, a um maior ângulo opõe-se um maior lado).

$\alpha: (P,Q,R \text{ não são colineares}).(P\hat{Q}R \cong 1 \text{ recto}) \rightarrow (\overline{PR} > \overline{PQ})$, (A hipotenusa dum triângulo rectângulo é sempre maior do que os catetos).

Teorema de Thales: $(M,N,P,Q \text{ são colineares}).(M'N'P'Q' \text{ são colineares}).(MM' \| NN' \| PP' \| QQ').(M \neq N).(P \neq Q) \rightarrow$
$\rightarrow \left(\dfrac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}} = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}}\right)$.

Veja-se que, por êste processo, a hipótese e a tese ficam sempre postas em relêvo. Além disso, os enunciados em linguagem corrente não são, de nenhum modo, mais precisos do êstes, apresentados em linguagem simbólica. Não esqueçamos ainda que (Obs. 1), § 7)) é indiferente adoptar êste ou aquêle símbolo no enunciado dum teorema, desde que se respeitem as convenções: assim, no enunciado do teorema θ, podemos, por exemplo, substituir A, B, C, respectivamente, por P, Q, R. Em particular, fazendo em α a substituïção: P por R, Q por Q, R por P, a hipótese não muda de aspecto, enquanto a tese toma a forma «$\overline{PR} > \overline{QR}$» (o cateto $\overline{PQ}$ foi substituído pelo cateto $\overline{QR}$, sem que tivesse havido alteração do teorema). É ainda para notar como o enunciado, que apresentamos, do teorema de Thales, inclui todos os casos possíveis: possibilidade de alguns dos pontos M, P, N, Q, coincidirem; arbitrariedade na disposição dos mesmos; possibilidade de as rectas MQ e $M'Q'$ serem paralelas, etc.

Visto que, segundo as propriedades 1) e 2) do § 5, se tem $(\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{t}) \equiv (\mathfrak{t}' \rightarrow \mathfrak{h}')$, será sempre possível enunciar *um mesmo teorema*, pelo menos de duas maneiras distintas. Assim, o teorema[2] «$(M$ pertence à mediatriz de $\overline{AB}) \rightarrow$ $\rightarrow (\overline{AM} \cong \overline{BM})$» [Qualquer ponto da mediatriz dum segmento é equidistante dos extremos dêsse segmento], pode ainda enunciar-se como segue: «$(\overline{AP} \cong \overline{BP})' \rightarrow (P$ *não* pertence à mediatriz de $\overline{AB})$» [Todo o ponto não equidistante dos extremos dum segmento não pertence à mediatriz dêsse segmento]; notemos ainda que o recíproco dêste teorema é verdadeiro, o que permite substituir a seta pelo sinal $\equiv$.

14—Proponhamo-nos demonstrar agora o teorema α, enunciado no § anterior, admitindo como verdadeiros o teorema θ do mesmo § e o teorema β seguinte: «$(U, V, X$ não são colineares$)(U\hat{V}X \cong 1 \text{ recto}) \rightarrow (U\hat{X}V < U\hat{V}X)$». Para isso, representemos por $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$, respectivamente, as proposições «P, Q, R não são colineares» e «$P\hat{Q}R \cong 1$ recto»; a hipótese $\mathfrak{h}$ de α será então $\mathfrak{h} \equiv \mathfrak{h}_1 . \mathfrak{h}_2$. De $\mathfrak{h}$ resulta, pelo teorema β: $P\hat{Q}R > P\hat{R}Q$ (prop. ∂); de $\mathfrak{h}_1$ e ∂, deduz-se, conforme θ: $\overline{PR} > \overline{PQ}$ (tese $\mathfrak{t}$ do teorema α, que dêste modo fica demonstrado). Podemos pôr em evidência tôdas as passagens da demonstração, utilizando o seguinte esquema (a chaveta indica que se deve tomar o produto lógico das proposições abrangidas):

$$\mathfrak{h} \equiv \mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2 \begin{matrix} \nearrow \partial \\ \searrow \mathfrak{h}_1 \end{matrix} \Big\} \rightarrow \mathfrak{t},$$

ou, mais simplesmente, $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}_1 \partial \rightarrow \mathfrak{t}$, donde $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{t}$ (teorema α); a implicação $\mathfrak{h} \rightarrow \partial$ (ou, o que é equivalente, $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}_1 \partial$) *não é mais do que o teorema* β; por outro lado, a implicação $\mathfrak{h}_1 \partial \rightarrow \mathfrak{t}$ *vem a ser o teorema* θ. Para reconhecer a identidade entre estas implicações e os teoremas indicados, basta fazer nos enunciados uma conveniente mudança dos símbolos, tendo em vista a obs. 1) do § 7. Pode escrever-se ainda (§ 8): $\beta \rightarrow \alpha$ (segundo θ).

Nesta demonstração empregou-se, como se vê, um único silogismo: mas raramente isto acontece. O exemplo seguinte dará uma idéia do número surpreendente de propriedades que se aplicam numa demonstração, aparentemente simples, de Geometria elementar.

Seja o teorema γ seguinte: «Todo o ângulo inscrito numa circunferência é congruente a metade do ângulo ao centro correspondente»; e demonstremos êste teorema no caso em que um dos lados do ângulo inscrito passa pelo centro da circunferência; isto é, demonstremos o teorema γ^*, cuja hipótese $\mathfrak{h}^*$ é o produto lógico das condições: $\mathfrak{h}_1$: $[x]$ é uma circunferência de centro em O; $\mathfrak{h}_2$: $A \in [x]$; $\mathfrak{h}_3$: $B \in [x]$; $\mathfrak{h}_4$: $C \in [x]$; $\mathfrak{h}_5$: $A \neq B$; $\mathfrak{h}_6$: $A \neq C$; $\mathfrak{h}_7$: $B \neq C$; $\mathfrak{h}_8$: $O \in BC$; e cuja tese $\mathfrak{t}$ é a condição: $A\hat{B}C \cong \frac{1}{2} A\hat{O}C$. Para a demonstração, suponhamos conhecidas as seguintes proposições categóricas verdadeiras: δ_1 — *Definição de «diâmetro» duma circunferência;* γ_1: «$([k]$ é uma circunferência de centro em $O)(\overline{PQ}$ é um diâmetro de $[k])(R \in [k])(R \neq P)(R \neq Q) \rightarrow (O, P, R$ não são colineares$)$»; δ_2 — *Definição de «circunferência de centro em O;* γ_2: «$(A, B, C$ não são colineares$)(\overline{AB} \cong \overline{AC}) \rightarrow (A\hat{C}B \cong \frac{1}{2} B\hat{A}C^{-1})$[3]»; γ_3: «$(\overline{XY}$ é um diâmetro duma circunferência de centro em $C) \rightarrow$ $\rightarrow (C \in [X, Y])$»; γ_4: $(P \in [M, N]) \rightarrow (A\hat{P}N^{-1} \cong A\hat{P}M)(A\hat{M}N \cong$ $\cong A\hat{M}P)$;» γ_5 — *Propriedade transitiva da congruência entre ângulos;* γ_6: «$(A\hat{B}C \cong P\hat{Q}R) \rightarrow \left(\frac{1}{2} A\hat{B}C \cong \frac{1}{2} P\hat{Q}R\right)$». Posto isto, virá, sucessivamente: ∂_1: $\overline{BC}$ é um diâmetro de $[x]$ (de $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_4, \mathfrak{h}_7$ e $\mathfrak{h}_8$, por δ_1)[4]; ∂_2: A, O, B não são colineares (de $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_5, \mathfrak{h}_6$ e ∂_1, por γ_1); ∂_3: $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ (de $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ e $\mathfrak{h}_3$, por δ_2); ∂_4: $A\hat{B}O \cong \frac{1}{2} AOB^{-1}$ (de ∂_2 e ∂_3, por γ_2); ∂_5: $O \in [B, C]$ (de $\mathfrak{h}_1$ e ∂_1, por γ_3); ∂_6: $(A\hat{O}B^{-1} \cong A\hat{O}C)(A\hat{B}C \cong A\hat{B}O)$ (de ∂_5, por γ_4); $\partial_7 \equiv \mathfrak{t}$: $A\hat{B}C \cong \frac{1}{2} A\hat{O}C$ (de ∂_4 e ∂_6, pelas propriedades

---

(1) Admitimos aqui, como óbvia, a seguinte equivalência: «$(A,B,C$ não são colineares$) \equiv (A, B, C$ são os vértices dum triângulo$)$».

(2) Admitimos aqui, como teorema, o que no § 7 aceitámos como definição. Tomamos agora, como definidora, a seguinte proposição: «A *mediatriz dum segmento* é a perpendicular ao meio dêsse segmento».

(3) Conseqüência dos teoremas: «Qualquer ângulo externo dum triângulo é congruente à soma dos internos opostos» e «Em qualquer triângulo a lados congruentes opõem-se ângulos congruentes».

(4) Quando, por exemplo, escrevemos: «$\partial_1 \ldots$ (de ∂_2 e ∂_3, por γ_2)» pretendemos com isto afirmar que $\partial_2 \partial_3 \rightarrow \partial_4$, sendo esta implicação equivalente ao teorema (on postulado) γ_2. Se, em vez dum teorema ou postulado, se tratar duma definição, ter-se-á, mais do que uma implicação simples $(\rightarrow)$ — uma equivalência $(\equiv)$. Note-se que foram omitidos os sinais . nos produtos lógicos.

γ_5 e γ_6 combinadas). Tem-se, pois, $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{t}$, como se pretendia demonstrar. Deixamos ao cuidado do leitor a construção dum esquema análogo ao do exemplo anterior.

15 — Na maior parte das demonstrações, em Geometria elementar, é necessário recorrer à intervenção de elementos que não figuram no enunciado, mas que se consegue eliminar antes de atingir o têrmo dos raciocínios. Tais elementos são introduzidos por meio de *hipóteses adicionais*, cujo papel consiste portanto em tornar exequível a demonstração. Assim, para demonstrar o teorema: «Se, num triângulo $[PQR]$, se tem $\overline{PQ} > \overline{PR}$, será também $P\widehat{R}Q > P\widehat{Q}R$», faz-se intervir um ponto M (elemento estranho), tal que: $M \in PQ$, $\overline{PM} \cong \overline{PR}$ (hipótese adicional); então, visto que $\overline{PQ} > \overline{PR}$, o ponto M ficará situado entre P e Q, e portanto será $P\widehat{R}Q > P\widehat{R}M$; por outro lado, como $P\widehat{M}R \cong P\widehat{R}M$ (visto os lados $\overline{PM}$ e $\overline{PR}$ do triângulo $[PMR]$ serem congruentes, *por construção*), ter-se-á $P\widehat{R}Q > P\widehat{M}R$; àlém disso, $P\widehat{M}R$ será maior do que $P\widehat{Q}R$, por ser ângulo externo do triângulo $[MQR]$, opôsto a $M\widehat{Q}R = P\widehat{Q}R$, e assim virá (tese do teorema): $P\widehat{R}Q > P\widehat{Q}R$[1]. O elemento M foi, como se vê, eliminado. Averiguemos, no entanto, em que medida é legítimo êste procedimento, tão usual em Geometria elementar.

Seja $\mathfrak{h}(X) \rightarrow \mathfrak{t}(X)$ o teorema a demonstrar, e suponhamos que foi possível estabelecer a implicação $\mathfrak{h}(X) . \mathfrak{a}(X, Y) \rightarrow \mathfrak{t}(X)$, em que $\mathfrak{a}(X, Y)$ representa uma hipótese adicional, introdutora do elemento estranho Y. Então, para que, da última implicação, se possa deduzir a primeira, basta que se verifique a seguinte condição de existência: «Qualquer que seja a determinação X^* de X que verifique a proposição $\mathfrak{h}(X)$, *existe, pelo menos, uma* determinação Y^* de Y para a qual é verdadeira a proposição $\mathfrak{a}(X^*, Y)$». Com efeito, seja X^* uma determinação de X que verifica $\mathfrak{h}(X)$ e, supondo verificada a condição anterior, designemos por Y^* um elemento tal que a proposição $\mathfrak{a}(X^*, Y^*)$ seja verdadeira; então, em virtude da implicação estabelecida, a proposição $\mathfrak{t}(X^*)$ também será verdadeira. Assim, tôda a determinação de X que verifique $\mathfrak{h}(X)$ verificará também $\mathfrak{t}(X)$: isto quere dizer que se tem $\mathfrak{h}(X) \rightarrow \mathfrak{t}(X)$.

Além disso, é fácil ver que, se esta condição se não verificar, nada se pode concluir. Portanto, sempre que se introduzirem elementos estranhos numa demonstração, é preciso ter o cuidado de estabelecer as respectivas proposições de existência. Assim, no exemplo apresentado, deve acrescentar-se que *o ponto* M *existe, necessàriamente*, em virtude do seguinte postulado: «Dados um segmento $\overline{AB}$, uma recta $\bar{a}$ e um ponto $P \in \bar{a}$, existe, para cada lado de P, um, e um só ponto M, tal que: $M \in \bar{a}$, $\overline{PM} \cong \overline{AB}$».

Tornemos agora ao teorema γ do § anterior. O seu enunciado, em linguagem simbólica, obtém-se a partir do de γ^*, suprimindo apenas as condições $\mathfrak{h}_6$ e $\mathfrak{h}_8$, na hipótese dêste. Então, para demonstrar o teorema em tôda a sua generalidade, bastará demonstrá-lo em cada um dos seguintes casos: $\mathfrak{p}_1$: $(A \neq C).(O \in BC)$; $\mathfrak{p}_2$: $(A \neq C).(O \in BA)$; $\mathfrak{p}_3$: $A = C$; $\mathfrak{p}_4$: $(A \neq C).(\widehat{B}O$ é interior a $A\widehat{B}C)$; $\mathfrak{p}_5$: $(A \neq C).(\widehat{B}O$ é exterior a $A\widehat{B}C)$. Com efeito, tem-se, como fàcilmente se verifica, representando por $\mathfrak{h}$ a hipótese de γ: $\mathfrak{h}\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{h}\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{h}\mathfrak{p}_3 + \mathfrak{h}\mathfrak{p}_4 + \mathfrak{h}\mathfrak{p}_5 \equiv \mathfrak{h}(\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 + \mathfrak{p}_4 + \mathfrak{p}_5) \equiv \mathfrak{h}$; isto é, os casos considerados são todos os possíveis. Mas as implicações $\mathfrak{h}\mathfrak{p}_1 \rightarrow \mathfrak{t}$ e $\mathfrak{h}\mathfrak{p}_2 \rightarrow \mathfrak{t}$ coincidem com o teorema γ^*, já demonstrado; por outro lado, é óbvio que se tem $\mathfrak{h}\mathfrak{p}_3 \rightarrow \mathfrak{t}$; resta-nos pois provar que se tem $\mathfrak{h}\mathfrak{p}_4 \rightarrow \mathfrak{t}$ e $\mathfrak{h}\mathfrak{p}_5 \rightarrow \mathfrak{t}$, visto que, pela adição lógica ordenada de tôdas estas implicações, se obtém $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{t}$. Ora, para demonstrar as duas últimas implicações, basta introduzir um ponto D, tal que: $D \in [x]$, $D \in BO$, $D \neq B$; êsse ponto *existe, necessàriamente*, em virtude do seguinte teorema: «Tôda a recta que passa por um ponto interior a uma circunferência encontra esta em dois pontos distintos». Então, virá, no caso $\mathfrak{p}_4$: $A\widehat{B}C \cong A\widehat{B}D + D\widehat{B}C$; e no caso $\mathfrak{p}_5$: $A\widehat{B}C \cong A\widehat{B}D - C\widehat{B}D$ ou $A\widehat{B}C \cong C\widehat{B}D - A\widehat{B}D$; mas, em qualquer dos casos, os ângulos $A\widehat{B}D$ é $C\widehat{B}D$ têm um lado que passa pelo centro, o que permite aplicar-lhes o teorema γ^*: dêste modo se chega, fàcilmente, à tese do teorema, sendo eliminado o ponto D, elemento auxiliar.

16 — Nos exemplos apresentados, a demonstração consistiu em passar *da hipótese para a tese*, por meio de várias implicações, equivalentes a outras tantas proposições categóricas, conhecidas como verdadeiras (teoremas, postulados ou definições). Por êste processo, são formuladas, umas após outras, diversas proposições condicionais, de modo que: 1) tôda a proposição, que não faça parte da hipótese do teorema ou duma hipótese adicional, é conseqüência lógica de algumas (ou mesmo tôdas) formuladas anteriormente; 2) a última proposição formulada coincide com a tese. Equivale isto a dizer (§ 8), que, partindo de proposições admitidas como verdadeiras, se é conduzido à proposição que se pretende demonstrar, pela aplicação sucessiva de silogismos. O caso mais simples será aquêle em que a hipótese fica ligada à tese por uma cadeia linear de proposições: $\mathfrak{h} \rightarrow \partial_1 \rightarrow \partial_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \partial_{n-1} \rightarrow \mathfrak{t}$ (donde $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{t}$); mas será êste também o caso menos freqüente. Em geral os raciocínios são mais complicados: apresentam-se ramificações muito variadas, em que as proposições se combinam entre si, quer pela soma lógica, quer pelo produto lógico.

Devemos contudo notar que não é esta a única maneira de proceder, o único método possível de demonstração: poderá ainda adoptar-se a marcha inversa, isto é, *da tese para a hipótese*, ou, o que vem a dar o mesmo, *da proposição a demonstrar, para as proposições categóricas admitidas como verdadeiras*. O primeiro método é chamado *sintético* ou *dedutivo: várias* proposições (pelo menos duas!) combinam-se entre si, por meio do raciocínio *dedutivo*, para conduzir a uma proposição *única*; o segundo método é chamado *analítico* ou *redutivo: reduz-se*, em última *análise*, a veracidade duma *única* proposição, à veracidade de *de duas ou mais* proposições. O método sintético é o mais conveniente para a exposição duma teoria já construída; o método analítico é o mais indicado para a investigação, quando se pretende saber se uma dada proposição é ou não verdadeira.

Ocupar-nos-emos adiante, dum terceiro método de demonstração.

17 — Apliquemos o método analítico à demonstração do seguinte teorema: «$(\bar{u}$ é perpendicular ao meio de $\overline{AB})$ $(P \in \bar{u}) \rightarrow (\overline{AP} \cong \overline{BP})$». Designemos por M o ponto $\bar{u} . AB$, que, por hipótese, é o ponto médio de $\overline{AB}$. Então, para que

[1] Neste exemplo e nos seguintes, limitamo-nos, para maior brevidade, a *esboçar* a demonstração, à maneira ordinária, fazendo um largo apêlo à intuïção.

se verifique a condição $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ (tese), basta que se tenha $[AMP] \cong [BMP]$ e $A\widehat{M}P \cong B\widehat{M}P$ (visto que, em triângulos congruentes, a ângulos congruentes se opõem lados congruentes); mas a última congruência resulta da hipótese, pois que, sendo $\bar{u}$ (ou MP) perpendicular a AB, os ângulos $A\widehat{M}P$ e $B\widehat{M}P$ serão rectos e portanto congruentes: resta-nos, pois, a condição $[AMP] \cong [BMP]$; mas, como os triângulos [AMP] e [BMP] são rectângulos, e um cateto dum é congruente a um cateto do outro (o lado $\overline{MP}$ comum), a última congruência será satisfeita, desde que se tenha $\overline{AM} \cong \overline{BM}$; ora, esta condição resulta imediatamente da hipótese, pois, como dissemos, M é o ponto médio de $\overline{AB}$: assim o teorema fica demonstrado.

Muitas vezes, as demonstrações feitas pelo método analítico são conduzidas de modo que o têrmo inicial seja a proposição dada, α, e o têrmo final, uma proposição, ω, conhecida como verdadeira, conforme o seguinte esquema: $\alpha \leftarrow \leftarrow \alpha_1 \leftarrow \cdots \leftarrow \alpha_h \leftarrow \omega$. É claro que, na redução de α a α_1, de α_1 a α_2, etc., intervêm proposições conhecidas, em geral distintas de ω, mas na demonstração é atribuída a esta um papel de relêvo, como se a veracidade de α ficasse reduzida, por êste processo, à veracidade de ω, e só à dessa proposição — o que não é exacto.

Em geral, aplica-se êste método, quando as sucessivas proposições são mesmo equivalentes entre si. São dêste género as demonstrações que, vulgarmente, se apresentam como «verificações de identidades», em que a passagem de cada têrmo para o seguinte é feita com a aplicação dos chamados «princípios de equivalência das equações». Exemplo: Seja o teorema: $\sqrt[m]{a} \, . \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a\,b}$ (1); para a sua demonstração consideremos, sucessivamente, as seguintes proposições, *equivalentes entre si*: $(\sqrt[m]{a} \, . \sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{a\,b})^m$, $(\sqrt[m]{a})^m . (\sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{a\,b})^m$, $a\,b = a\,b$; mas a última proposição é incondicionalmente verdadeira (trata-se duma identidade): logo, também a primeira, *equivalente a esta,* será incondicionalmente verdadeira, e assim o teorema está demonstrado. Notemos que, neste exemplo, intervieram não só os princípios de equivalência, mas ainda: 1) propriedade relativa à potência dum produto; 2) definição de potência; 3) propriedades da igualdade.

(Continua) JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

(1) Em virtude das convenções adoptadas no § 12, a hipótese dêste teorema («a e b são números» e «*m* é um número inteiro») é supérflua, e assim o teorema fica reduzido à tese, proposição incondicionalmente verdadeira neste caso. Supomos, é claro, que se trata aqui apenas de raizes positivas.

EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geógrafo.

555 — Para que valores de m são reais e desiguais as quatro raízes da equação: $2x^4-(3m-2)\,x^2+m^2-4=0$. R: *Para que as quatro raizes sejam reais e desiguais é necessário e suficiente que o descriminante, a soma e o produto das raizes da equação resolvente* $2x^2-(3m-2)\,x+m^2-4=0$, *sejam positivos, o que torna as suas raizes reais, desiguais e positivas. Quere dizer será:* $(3m-2)^2-8m^2+32>0$; $3m-2>0$ *e* $m^2-4>0$. *Estas desigualdades são satisfeitas: a 1.ª para qualquer valor real de* m; *a 2.ª para* $m>2/3$ *e a 3.ª para valores de* m *tais que* $m>2$ *ou* $m<-2$. *Satisfazem pois às três desigualdades simplesmente os valores de* m *reais tais que* $m>2$. J. C.

556 — Aplique a fórmula do desenvolvimento do binómio de Newton ao desenvolvimento de $(1+x)^4$. R: $(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$. J. C.

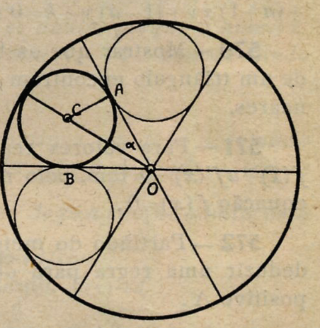
557 — Defina algèbricamente o logarítmo do número N no sistema de base a. Calcule o logarítmo de 16 no sistema de base 2. R: *Chama-se logaritmo do número* N *no sistema de base* a *ao número* x *tal que* $a^x=N$. *Assim* $\log_2 16=x$, $2^x=16$ $x=4$. J. C.

558 — Os comprimentos das bases de um trapézio rectângulo são $16^m,32$ e $13^m,86$ e o da altura é $4^m,29$. Calcule recorrendo ao cálculo logarítmico, os valores dos ângulos do trapézio. R: *Como é óbvio dois dos ângulos são rectos e os outros dois são os ângulos agudos dum triângulo rectângulo de que os catetos são* $4^m,29$ *e* $2^m,46=16^m,32-13^m,86$. *E será então* $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2,46}{4,29}$ *donde* $\log\operatorname{tg}\alpha=0,39094+\bar{1},36754=\bar{1},75848$ *e* $\alpha=29^\circ\,49'\,52''$ *e* $\beta=60^\circ\,10'\,8''=90^\circ-29^\circ\,49'\,52''$. J. C.

559 — Verifique a igualdade: $\operatorname{sen}(a+b)\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 b$. R: $\operatorname{sen}(a+b)\operatorname{sen}(a-b)=(\operatorname{sen} a\cos b+\operatorname{sen} b\cos a)\times\times(\operatorname{sen} a\cos b-\operatorname{sen} b\cos a)=\operatorname{sen}^2 a\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 b\cos^2 a=\operatorname{sen}^2 a\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 b(1-\operatorname{sen}^2 a)=\operatorname{sen}^2 a(\cos^2 b+\operatorname{sen}^2 b)-\operatorname{sen}^2 b=\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 b$. J. C.

560 — Determine, sem recorrer às tábuas, os valores de: $\cos 75^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ)$ e de $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{13}{3}\pi\right)$. R: $\cos 75^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ)=\cos 30^\circ\cos 45^\circ-\operatorname{sen} 30^\circ\operatorname{sen} 45^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$; $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{13}{3}\pi\right)=-\operatorname{tg}\dfrac{13}{3}\pi=-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$. J. C.

561 — Considere uma circunferência de raio r. Trace uma outra circunferência de raio $\dfrac{r}{3}$ e que seja tangente interiormente à primeira. Demonstre que há um número inteiro de circunferências nas condições da 2.ª e que são tangentes entre si. R: *Da figura, considerando o triângulo* [OAC], *deduz-se que* $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{AC}{OC}=\dfrac{1}{2}$ *donde* $\alpha=30^\circ$ *e portanto* $A\widehat{O}B=60^\circ$. *Como* $360^\circ=6\cdot60^\circ$ *conclue-se que há um número inteiro de circunferências nas condições do enunciado; êsse número é evidentemente* 6. J. C.



562 — Numa divisão, com resto diferente de zero ¿qual é o menor número de unidades que pode juntar ao dividendo sem alterar o resto? Justifique a resposta. R: *Tem-se* (1) $D=dq+r$, $r<d$; *adicionando* m *a ambos os membros de* (1) *vem* (2) $m+D=dq+r+m$. *Para que* m *seja o menor número nas condições do enunciado, deverá ser* (3) $m+D=d(q+1)+r$ *ou atendendo a* (2) *e* (3) $r+dq+m=d(q+1)+r$ *e portanto* $m=d$. J. C.