PROBLEMAS DIVERSOS

PROBLEMA PROPOSTO

652 — Sejam $Q_1=[\eta_0, \eta_1, \cdots \eta_n]$ e $Q_2=[\xi_0, \xi_1, \cdots \xi_n]$ dois pontos do espaço projectivo de n dimensões e

$$a_0\,\xi_0+a_1\,\xi_1+\cdots+a_n\,\xi_n=0$$

a equação de um hiperplano π.

Se Q_0 e Q_1 não pertencerem a π, é sempre possível determinar uma linha (stetiger Weg) — $\zeta_i=f_i(t)$, f_i função contínua — que passe pelos dois pontos e não intersecte o hiperplano π.

Nota—Escrever $f_i(t)=(1-t)\eta_i+t\xi_i$ (1).

Comparar êste resultado com o que se passa no espaço não-projectivo.

(1) Schreier-Sperner — «Analytische Geometrie» — II — pag. 142.

R. L. G.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PROPOSTOS NOS N.os 4 e 5

431 — 1) *Convenções.*—Designarei por $e_1\ e_2 \cdots e_n$ os vectores que suporei sempre ortogonais unitários, de forma a que, sendo $x=x^i e_i$, $y=y^i e_i$. Seja $x^i=x_i=x \mid e_i$.

2) *A função* $\mu(x)$. — A generalidade da função $\mu(x)$ tem de ser limitada por T dever ser um operador linear: $T(x+y)=$ $=Tx+Ty$, $T(\lambda x)=\lambda Tx$ o que dá $\mu(x+y)=\mu(x)+\mu(y)$, $\mu(\lambda x)=\lambda\mu(x)$ ou finalmente $\mu(x)=x^i\mu_i$ (em que $x=x^i e_i$, $\mu_i=\mu(e_i)$).

3) *A transformação* $Tx=x+\mu a$. — Sendo $x=x^i e_i$, $a=a^i e_i$, $\mu(x)=x^i\mu_i$ vem $x'=Tx=x^i e_i+x^k\mu_k a^i e_i=e_i(x^i+x^k\mu_k a^i)=$ $=e^i x'^i$ em que $x'^i=x^i+x^k\mu_k a^i=\alpha^i_k x^k$ em que $\alpha^i_k=\delta^i_k+\mu_k a^i$.

4) *T ortogonal.* (Definiremos produtos internos $x \mid y=x^i y^i$). — Supondo que a não é isótropo, tornaremos a unitário multiplicando μ por um factor conveniente. Escolhemos o sistema coordenado de forma que $e_n=a$, o que dá $a^k=\delta^k_n$. A condição $\alpha^i_k\alpha^i_l=\delta_{kl}$ escreve-se $(\delta^i_k+\mu_k\delta^i_n)(\delta^i_l+\mu_l\delta^i_n)=\delta_{kl}$ ou, notando que $\delta^i_k\delta^i_l=\delta_{kl}$, $\delta^i_k[\mu_k\delta^i_l+\mu_l\delta^i_k+\delta^i_n\mu_k\mu_l]=0$ ou $\mu_k\delta^n_l+\mu_l\delta^n_k+$ $+\mu_k\mu_l=0$ fazendo $k\neq n$, $l\neq n$ vem $\mu_k\mu_l=0$ $k=1\cdots n=1$, fazendo $k=l=n$ vem $2\mu_n+\mu_n^2=0$ desprezando a solução sem interêsse $\mu_n=0$, temos $\mu_n=-2$, o que dá $\mu(x)=-2(x \mid a)$ [a unitário]. Esta expressão, tendo o carácter tensorial dum invariante, é válida com quaisquer coordenadas e é fácil ver que o operador $Tx=x-2(x \mid a).a$ é ortogonal, pois muda o sinal da componente segundo a e conserva as outras. a é direcção unida com valor próprio -1, e as $n-1$, direcções do hiperplano perpendicular a a são unidas com o valor próprio $+1$.

5) *T unitário* (produto interno $x \mid y=x^i\bar{y}^i$); tomando ainda a unitário para vector cordenado e_n, a condição $\alpha^i_k\bar{\alpha}^i_l=\delta_{kl}$ escreve-se $(\delta^i_k+\mu_k\delta^i_n)(\delta^i_l+\bar{\mu}_l\delta^i_n)=0$, $\mu_k\delta^n_l+\bar{\mu}_l\delta^n_k+\mu_k\bar{\mu}_l=0$; fazendo $k=l\neq n$ vem ainda $\mu_k=0$, $k=1,\cdots n-1$ e para $k=l=n$, $\mu_n+\bar{\mu}_n+\mu_n\bar{\mu}_n=0$; seja $\mu_n=r+is$ vem $2r+r^2+s^2=0$ ou, introduzindo um parâmetro real t $\mu_n=-\dfrac{2}{(1+t^2)}(1+it)$ ou, passando para coordenadas gerais (a unitário) $\mu(x)=$ $=-\dfrac{2}{(1+t^2)}(1+it)(x \mid a)$; para $t=0$ vem a solução real já obtida para o caso de T ser ortogonal.

6) *T de projecção.* — Suponhamos que T anula as componentes segundo os vectores coordenados $e_1\cdots e_p$ e conserva os componentes segundo $e_{p+1}\cdots e_n$. Será então $\alpha^i_k=0$, $i=1\cdots p$, $\alpha^i_k=\delta^i_k$, $i=p+1\cdots n$ ou $\begin{cases}\delta^i_k+\mu_k a^i=0 & i=1\cdots p\\ \delta^i_k+\mu_k a^i=\delta^i_k & i=p+1\cdots n\end{cases}$ ou $\begin{cases}\mu_k a^i=-\delta^i_k & i=1\cdots p\\ \mu_k a^i=0 & i=p+1,\cdots n\end{cases}$ não sendo os μ_i todos nulos serão todos os a^i, para $i=p+1\cdots n$, e no caso de serem nulos todos os μ^i menos um μ_I, poderá ser $a^I\neq 0$, ou $a^I=-\dfrac{1}{\mu^I}$ (seria fácil de ver geomètricamente que a soma a x dum vector de direcção fixa não poderia anular uma variedade de E_n a mais de 1 dimensão). A tradução disto em notação de produto interno é $\mu_I=-\dfrac{1}{\sqrt{(a \mid a)}}$, $\mu(x)=-\dfrac{x \mid a}{a \mid a}$ é então, supondo de novo a unitário $Tx=x-(x \mid a)a$, que é evidentemente uma projecção ao longo de a sôbre o hiperplano perpendicular a a. As direcções unidas são a de a (valor próprio 0) e as do hiperplano ortogonal, com valores próprios iguais a 1.

7) *T simetria.* — Supondo $x \mid y=x^i y^i$ podemos tomar para $e_1\cdots e_{n-1}$ as direcções do hiperplano de simetria, e para e_n a direcção normal. Terá de ser $\begin{cases}Tx \mid e_i=x \mid e_i\\ Tx \mid e_n=-x \mid e_n\end{cases}$, $\begin{cases}x^i+x^k\mu_k a^i=x^i\\ x^n+x^k\mu_k a^n=-x^n\end{cases}$, $\begin{cases}x^k\mu_k a^i=0\\ x^k\mu_k a^n=-2x^n\end{cases}$, dada a arbitrariedade dos x^k terá de ser $a^i=0$, $i=1\cdots n-1$, $x^k\mu_k=-\dfrac{2x^n}{a^n}$ em forma tensorial $\mu(x)=-\dfrac{2(x \mid a)}{a \mid a}$. Isto prova que a tem de ter comprimento não nulo, pois numa direcção isótropa não pode ser tomada para direccão cordenada. Supondo agora que a é unitário, vem $\mu(x)=-2(x \mid a)$, $Tx=x-2(x \mid a)a$ (igualdade com carácter tensorial). As direcções unidas são as de a (valor próprio -1) e as direcções ortogonais a a (valor próprio $+1$). Vê-se ainda que se foi conduzido ao mesmo resultado que ao investigar se T é ortogonal. Ou seja, um operador da forma $x'=x+\mu(x).a$ se for ortogonal é uma simetria, em que o hiperplano de simetria é $a \mid y=0$.

Mário de Alenquer

Dedução mais simples:

4) *Ortogonal.* — O símbolo $[x, y]=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, permite-nos escrever $[Tx, Tx]=[T' Tx, x]=[x, x]$ ou $[x+\mu a, x+\mu a]=[x, x]$, $2\mu[a, x]+\mu^2[a, a]=0$, $\mu(x)=$ $=-\dfrac{2[a, x]}{[a, a]}$, $[a, a]\neq 0$.

5) *Unitária.* — O símbolo $(x, y)=\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i\bar{y}_i$, permite-nos escrever $(Tx, Tx)=(\bar{T}' Tx, x)=(x, x)$ ou $(x+\mu a, x+\mu a)=(x, x)$, $[(a, a)=1]$, $\bar{\mu}(a, x)+\mu\overline{(a, x)}+\mu\bar{\mu}=0$ $[\mu+(a, x)][\bar{\mu}+\overline{(a, x)}]-|(a, x)|^2=0$, $\mu+(a, x)=e^{i\theta}(a, x)$, $\mu(x)=(e^{i\theta}-1).(a, x)$. E o mesmo símbolo leva imediata-

mente à forma de μ para os outros operadores — *projecção* e *simetria*.

NOTA — As deduções do autor estão bem; mas ressentem-se da circunstância de não pertencerem ao domínio natural dos respectivos problemas — problemas de operadores em um espaço real ou complexo onde se definiu prèviamente um *produto interno*.

R. L. G.

548 — *a)* A transformação $\bar{x}=Tx$ definida por $\bar{x}^i=l^i_k\, x^k$ representará uma rotação em tôrno da origem se forem invariantes: α) a distância de dois pontos: $d(\bar{x}\,\bar{y})=d(x\,y)$, β) a orientação de um triedro.

A condição β) é satisfeita se fôr positivo o determinante $|l^i_k|$. A primeira condição exprime-se: $\sum_i(\bar{x}^i-\bar{y}^i)^2=\sum_i(x^i-y^i)^2$ ora $\sum_i(\bar{x}^i-\bar{y}^i)^2=(\bar{x}^i-\bar{y}^i)(\bar{x}^i-\bar{y}^i)=(l^i_k\, x^k-l^i_h\, y^h)\,(l^i_u\, x^u-l^i_v\, y^v)=$ $=l^i_k\, l^i_u\, x^k\, x^u+l^i_h\, l^i_v\, y^h\, y^v-2l^i_h\, l^i_v\, x^h\, y^v$ e $\sum_i(x^i-y^i)^2=\sum_i(x^i)^2+$ $+\sum_i(y^i)^2-2\sum_i x^i\, y^i$ e identificando as duas expressões vem $l^i_h\, l^i_u=\delta_{kv}$ como condição necessária e suficiente, acrescentando-lhe $|l^i_k|>0$. Estas duas condições caracterizam a matriz ortogonal de determinante $+1$.

b) Seja $w=c^i\, e_i$ o vector unitário do eixo das rotações. Qualquer vector $P-O$ tem uma componente segundo w e uma componente perpendicular a w: $P-O=[(P-O)\,|\,w]\,w+$ $+\{(P-O)-[(P-O)\,|\,w]\,w\}=(Q-O)+(R-O)$. A rotação deixa invariante $Q-O$; $R-O$ sendo perpendicular a w é transformado em $\bar{R}-O=(R-O)\cos\theta+[w\wedge(R-O)]\,\text{sen}\,\theta$, donde $\bar{P}-O=\bar{Q}-O+\bar{R}-O=(Q-O)+(R-O)\cos\theta+[w\wedge(R-O)]\,\text{sen}\,\theta=$ $=[(P-O)\,|\,w]\,w+\{(P-O)-[(P-O)\,|\,w]\,w\}\cos\theta+w\wedge\{(P-O)-$ $-[(P-O)\,|\,w]\,w\}\,\text{sen}\,\theta=[(P-O)\,|\,w]\,(1-\cos\theta)\,w+(P-O)\cos\theta+$ $+w\wedge(P-O)\,\text{sen}\,\theta$. Tomando coordenadas $\bar{P}-O=(x^i\, c_i)\,(1-$ $-\cos\theta)\,.\,c^k\, e_k+x^k\, e_k\cos\theta+e^{\cdot\cdot k}_{ji}\, c^j\, x^i\, e_k\,\text{sen}\,\theta=e_k\,\{x^i\,[c_i\, c^k(1-\cos\theta)+$ $+\delta^k_i\cos\theta+e^{\cdot\cdot k}_{ji}\, c^j\,\text{sen}\,\theta]\}$, ou $l^k_i=c_i\, c^k(1-\cos\theta)+\delta^k_i\cos\theta+e^{\cdot\cdot k}_{ji}\, c^j\,\text{sen}\,\theta$, que é a expressão pedida.

c) Fazendo $i=k$ vem (sem somação) $l^i_i=c_i c^i(1-\cos\theta)+\cos\theta$ ou em coordenadas cartesianas ortogonais $l^i_i=(c_i)^2\,(1-\cos\theta)+$ $+\cos\theta$, donde $c_i^2=\dfrac{l^i_i-\cos\theta}{1-\cos\theta}$ e somando em i os valores de l^i_i e notando que $\sum(c_i)^2=1$ vem $\sum_i l^i_i=1+2\cos\theta$. Vê-se imediatamente que $B=1+\text{tg}\,\dfrac{\theta}{2}\, w\wedge$ em que w é o vector $(c_1 c_2 c_3)$.

É também $B'=1-\text{tg}\,\dfrac{\theta}{2}\, w\wedge$. A igualdade $\bar{x}=(B')^{-1}Bx$ escreve-se $B'\bar{x}=Bx$, ou $\bar{x}-\text{tg}\,\dfrac{\theta}{2}\, w\wedge\bar{x}=x+\text{tg}\,\dfrac{\theta}{2}\, w\wedge x$, ou

(1) $\bar{x}-x=\text{tg}\,\dfrac{\theta}{2}\, w\wedge(x+\bar{x})$. Consideremos o paralelogramo de vértices $O, x, \bar{x}, x+\bar{x}$. A igualdade (1) exprime que: *a)* $\bar{x}-x$ é perpendicular a $\bar{x}+x$, ou seja que as diagonais do paralelogramo considerado são perpendiculares, e que êle é um losango: ou seja x e $\bar{x}$ tem o mesmo comprimento; *b)* $\bar{x}-x$ é perpendicular a w.

As condições *a)* e *b)* chegam para caracterizar uma rotação em tôrno de w. Verifica-se igualmente que o ângulo dessa rotação é θ, notando que $\bar{x}-x$ existe num plano perpendicular a w, e que o comprimento de $w\wedge(x+\bar{x})$ também perpendicular a w, é a projecção de $x+\bar{x}$ sôbre o dito plano.

Mário de Alenquer

NOTA — Solução original para a qual se poderá apenas repetir a observação relativa ao problema 431.

R. L. G.

552 — Seja $S=\sum_{m,\,n=2}^{\infty} n^{-m}$. Sendo S uma série de termos positivos podemos escrever $S=\sum_{n=2}^{\infty} S_n$, em que $S_n=\sum_{m=2}^{\infty} n^{-m}$.

Ora S_n é uma progressão geométrica, donde $S_n=\dfrac{n^{-2}}{1-n^{-1}}=$ $=\dfrac{1}{n(n-1)}$. Portanto $S=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n-1)}+\cdots$; mas $\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$, donde $S=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+$ $+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\cdots$ e os termos desta série destroem-se 2 a 2 à excepção do primeiro, donde vem $S=1$.

Mário de Alenquer

NOTA — A resolução do problema anterior conduz ao cálculo da soma da série numérica convergente $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(n-1)}$, cujo têrmo geral pode escrever-se $u_n=\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$.

A aplicação do teorema adiante enunciado resolve, simultâneamente, o problema do estudo do seu carácter e do cálculo da sua soma.

«Se o têrmo geral duma série númerica fôr da forma $u_n=\sum_{i=0}^{p} a_i\,\varphi(n+i)$, com $\sum_{i=0}^{p} a_i=0$, e se $\lim_{n\to\infty}\varphi(n)$ é finito, a serie de têrmo geral u_n é convergente e a sua soma é $S=a_0\varphi(1)+(a_0+a_1)\varphi(2)+\cdots+(a_0+a_1+\cdots+a_{p-1})\varphi(p)+(a_1+2a_2+$ $+\cdots+p\,a_p)\lim_{n\to\infty}\varphi(n)$».

É imediato que o têrmo geral da série dada satisfaz à condição necessária de convergência $\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{p} a_i\,\varphi(n+i)=$ $=\lim_{n\to\infty}\varphi(n)\,.\,\sum_{i=0}^{p} a_i=0$. Por outro lado é $S_n=a_0\,\varphi(1)+$ $+(a_0+a_1)\,\varphi(2)+\cdots+(a_0+a_1+\cdots+a_{p-1})\,\varphi(p)+(a_1+a_2+\cdots+$ $+a_p)\,\varphi(n+1)+\cdots+(a_{p-1}+a_p)\,\varphi(n+p-1)+a_p\,\varphi(n+p)$ e $S=\lim_{n\to\infty} S_n=a_0\varphi(1)+(a_0+a_1)\varphi(2)+\cdots+(a_0+a_1+\cdots+a_{p-1})\varphi(p)+$ $+(a_1+2a_2+\cdots+p\,a_p)\lim_{n\to\infty}\varphi(n)$.

A. Sá da Costa

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Agros. Revista dos Estudantes de Agronomia. Ano XXIII — n.os 4, 5 e 6.

Técnica. Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. — n.os 116, 117 e 118 (Janeiro, Fevereiro e Março de 1941.

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

A Direcção da S. P. M, na sua última reünião, deliberou dirigir uma circular aos associados pedindo o envio de comunicações científicas para leitura em reüniões da Sociedade a realizar em breve.

Serão também possìvelmente organizadas séries de conferências.

REFERÊNCIAS

A Direcção da «Gazeta de Matemática» agradece muito reconhecida as referências feitas pelo «Diário de Lisboa» no seu número de 2 de Abril e pelo «Jornal de Comércio e das Colónias» em 7 de Abril.