26-06-7

1.º ANO - N.º 4

GAZETA DE MATEMÁTICA

OUTUBRO DE 1940

Redacção e Administração: Faculdade de Ciências — Rua da Escola Politécnica — Lisboa

EDITOR: JOSÉ DUARTE DA SILVA PAULO

Composto e impresso na Soc. Industrial de Tipografia, Limitada R. Almirante Pessanha, 3 e 5 - Lisboa

UM PROBLEMA DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Sejam

$$\begin{cases} a\,x+b\,y+c=0\\ a'\,x+b'\,y+c'=0\\ a''\,x+b''\,y+c''=0 \end{cases}$$

as equações de três rectas não concorrentes. E representemos por C, C', C'' *os complementos algébricos dos elementos* c, c', c'' *do determinante*

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{vmatrix}.$$

A condição necessária e suficiente para que o ponto $P(x_1, y_1)$ *seja interior ao triângulo formado pelas três rectas, é que*

$$(a\,x_1+b\,y_1+c)\cdot\frac{C}{\Delta}>0$$

$$(a'\,x_1+b'\,y_1+c')\cdot\frac{C'}{\Delta}>0$$

$$(a''\,x_1+b''\,y_1+c'')\cdot\frac{C''}{\Delta}>0.$$

Na verdade, a identidade

$$(ax+by+c)\cdot\frac{C}{\Delta}+(a'\,x+b'\,y+c')\cdot\frac{C'}{\Delta}+(a''\,x+b''\,y+c'')\cdot\frac{C''}{\Delta}=1,$$

dá-nos

$$(ax_1+by_1+c)\cdot\frac{C}{\Delta}=1>0,$$

no caso particular de o ponto P coïncidir com o *vértice oposto* ao lado de equação $ax+by+c=0$. E se o ponto é interior ao triângulo, o sinal de $ax+by+c$ não varia com êsse ponto (sempre interior!).

Logo,

$$(a\,x_1+b\,y_1+c)\cdot\frac{C}{\Delta}>0$$

$$(a'\,x_1+b'\,y_1+c')\cdot\frac{C'}{\Delta}>0$$

$$(a''\,x_1+b''\,y_1+c'')\cdot\frac{C''}{\Delta}>0.$$

— **Êste problema foi enviado à Redacção pelo Professor da Faculdade de Ciências do Pôrto Doutor Madureira e Sousa.**

CORPOS QUADRÁTICOS E SEUS IDEAIS

(CONTINUADO DO N.º 2)

Chama-se norma de um número α ao produto $n(\alpha)=\alpha.\alpha'$, de α pelo seu conjugado, que é igual a $\frac{a_0}{a_2}$, se α satisfaz à equação $a_2x^2+a_1x+a_0=0$, e é um número racional e inteiro se α fôr um inteiro. A norma de um número racional é então igual ao quadrado do módulo e a norma de um inteiro α é um inteiro racional.

É fácil ver que a norma de um produto é igual ao produto das normas dos factores; efectivamente $n(\alpha\beta)=(\alpha\beta)(\alpha\beta)'=\alpha\beta\alpha'\beta'=n(\alpha)\,n(\beta)$, por ser $(\alpha\beta)'=\alpha'\beta'$, isto é o conjugado de um produto igual ao produto dos conjugados.

Chamaremos unidade de um corpo, a qualquer inteiro ε do corpo tal que $\frac{1}{\varepsilon}$ seja também um inteiro ε', e diremos que um inteiro β divide um inteiro α se existir um terceiro γ tal que $\alpha=\beta.\gamma$. Quere dizer então que $\varepsilon\varepsilon'=1$, e portanto ε' é também uma unidade. Uma unidade divide todo o inteiro α do corpo pois que $\frac{\alpha}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\alpha=\varepsilon'\alpha$ visto que o produto de dois inteiros é um inteiro. No caso do corpo de Gauss as unidades são ±1 e $\pm i$.

Diremos que dois números α e β são associados se qualquer dêles é divisível pelo outro; tem-se então (7) $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=1$ e $\alpha=\varepsilon\beta$, isto é, α e β só diferem por um factor unidade. De facto de (7) vem $\alpha=\beta\cdot\frac{\alpha}{\beta}$ e como $\frac{\alpha}{\beta}$ é um inteiro γ e $\frac{\beta}{\alpha}$ é também um inteiro igual a $\frac{1}{\gamma}$, γ é uma unidade ε, e $\alpha=\varepsilon.\beta$.

Concluímos assim que todo o inteiro é divisível pelas unidades do corpo e pelos seus associados; se o inteiro não tiver outros divisores diremos que êle é *indecomponivel* no corpo e como vemos esta noção generaliza a de número primo no