DO INTEGRAL DE RIEMANN AO INTEGRAL DE LEBESGUE

(duma conferência de Henri Lebesgue realizada na Sociedade de Matemática em Copenhague e publicada no n.º 2 (1927) da Révue de Métaphysique et de Morale)

Os Geómetras do século XVII consideravam o integral de $f(x)$, — o têrmo integral não era ainda usado, mas pouco importa — como a soma duma infinidade de indivisíveis cada um dos quais era a ordenada, positiva ou negativa, de $f(x)$. Pois bem: nós não fizemos mais do que agrupar os indivisíveis de grandeza comparável, ou, como se diz em álgebra, reünimos, reduzimos os termos semelhantes. Pode dizer-se ainda que, com o procedimento de Riemann, se tentava somar indivisíveis tomando-os pela ordem em que eram dados pela variação de x; operava-se, pois, como o faria um comerciante sem método que contasse moedas e notas ao acaso pela ordem em que lhe chegassem às mãos; ao passo que nós operamos como o comerciante metódico que diz:

tenho $m(E_1)$ moedas de 1 corôa (Dinamarca) o que dá $1 . m(E_1)$
tenho $m(E_2)$ moedas de 2 corôas o que dá $2 . m(E_2)$
tenho $m(E_3)$ notas de 5 corôas o que dá $5 . m(E_3)$, etc.
tenho, portanto, ao todo $S=1 . m(E_1)+2 . m(E_2)+5 . m(E_3)+\cdots$

Os dois modos de proceder conduzirão, certamente, o comerciante ao mesmo resultado, porque, por mais rico que êle seja, só tem um número finito de notas para contar; mas, para nós, que temos que adicionar uma infinidade de indivisíveis, a diferença entre as duas maneiras de proceder é capital.

Trad. H. R.

Nota do Prof. Dr. Ruy Luís Gomes

Representando por $m(E_i)$ a medida (L) do conjunto dos pontos x tais que os valores correspondentes, $f(x)$, estão situados dentro dos limites $y_i < f(x) \leq y_{i+1}$, tem-se em $S=\Sigma \eta_i\, m(E_i)$, com $y_i < \eta_i \leq y_{i+1}$, a soma que conduz ao integral L de $f(x)$

EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geógrafo

379 — Determine m de modo que o trinómio $(m+1)\,x^2-8x+m+1$ seja positivo para qualquer valor real de x. R: m *deve satisfazer à desigualdade* $4^2-(m+1)^2<0$ *donde se deduz* $m>3$ *ou* $m<-5$.

M. Z.

380 — *a)* Indique as condições a que devem satisfazer os coeficientes da equação: $ax+by=c$ para que esta tenha uma infinidade de soluções inteiras e positivas. *b)* Defina permutações de n objectos. Relacione os números de arranjos ${}^nA_p$ e ${}^{n+1}A_p$ de n objectos tomados p a p e de $n+1$ objectos tomados p a p.

381 — Sendo 12,12 m o comprimento dos lados dum losango e 6,34 m o comprimento da sua diagonal menor, determine por cálculo logarítmico os valores dos ângulos do losango. R: *Os ângulos são* $30°19'26''$ *e* $149°40'34''$.

382 — Verifique a seguinte igualdade:

$$(\cos x+\operatorname{sen} x)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x .$$

R: *Dividindo ambos os termos por* $\cos x+\operatorname{sen} x$ *vem*:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\operatorname{sen} x),$$

igualdade evidente atendendo a que $\cos\frac{\pi}{4}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

M. Z.

383 — Determine, sem recorrer às tábuas, os valores de $\operatorname{cotg}(-390°)$ e de $\sec\frac{9}{4}\pi$. R: $\operatorname{cotg}(-390°)=\operatorname{cotg}330°=-\operatorname{cotg}30°=-\sqrt{3}$; $\sec\frac{9\pi}{4}=\sec\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$.

M. Z.

384 — Considere um triângulo ABC, rectângulo em A e designe por a, b e c os comprimentos dos lados opostos aos ângulos A, B e C. Exprima os comprimentos m, m' e m'' das medianas do triângulo em função dos lados. R: $m=\frac{a}{2}$, $m'=\sqrt{c^2+\frac{b^2}{4}}$, $m''=\sqrt{b^2+\frac{c^2}{4}}$.

M. P. R.

385 — Calcule, sem efectuar as operações, o resto da divisão por 4 do número $86\times381^4+74$. Enuncie as regras que usou.

I. S. C. E. F. — 25 de Julho de 1940

386 — *a)* Defina sistema de logarítmos e enuncie as propriedades fundamentais do cálculo logarítmico. Dada a decomposição em números primos dum número $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$ exprima $\log n$ em função de $\log p_1, \log p_2, \cdots \log p_n$. *b)* Calcule por logarítmos $x=\frac{0{,}01^3\sqrt{1{,}002}}{0{,}0004}$. R: $x=0{,}0024973$.

387 — Diga em que consiste o desenvolvimento do binómio de Newton; escreva o têrmo geral e enuncie a lei de passagem dum têrmo para o seguinte. Calcule

$$f(x)=\frac{(x+1)^n+(x-1)^n}{(x+1)^n-(x-1)^n}.$$

388 — São dadas no mesmo plano duas circunferências uma de raio r, outra de raio $3r$; conhecendo o comprimento d da corda comum, calcular a distância dos centros. Discussão R: *Deverá ser* $d\leq 2r$ *para que o problema seja possível. Com* $d<2r$ *o problema tem as duas soluções*

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{36r^2-d^2}+\sqrt{4r^2-d^2}\right) \text{ e } \frac{1}{2}\left(\sqrt{36r^2-d^2}-\sqrt{4r^2-d^2}\right).$$

Com $d=2r$ *há a solução única* $\frac{1}{2}\sqrt{36r^2-d^2}$.

M. P. R.

389 — Num rectângulo de lados L e l tiram-se as bissectrizes dos ângulos interiores. Verificar que os pontos de encontro dessas bissectrizes definem um quadrado e determi-