DO INTEGRAL DE RIEMANN AO INTEGRAL DE LEBESGUE

(duma conferência de Henri Lebesgue realizada na Sociedade de Matemática em Copenhague e publicada no n.º 2 (1927) da Révue de Métaphysique et de Morale)

Os Geómetras do século XVII consideravam o integral de $f(x)$, — o têrmo integral não era ainda usado, mas pouco importa — como a soma duma infinidade de indivisíveis cada um dos quais era a ordenada, positiva ou negativa, de $f(x)$. Pois bem: nós não fizemos mais do que agrupar os indivisíveis de grandeza comparável, ou, como se diz em álgebra, reünimos, reduzimos os termos semelhantes. Pode dizer-se ainda que, com o procedimento de Riemann, se tentava somar indivisíveis tomando-os pela ordem em que eram dados pela variação de x; operava-se, pois, como o faria um comerciante sem método que contasse moedas e notas ao acaso pela ordem em que lhe chegassem às mãos; ao passo que nós operamos como o comerciante metódico que diz:

tenho $m(E_1)$ moedas de 1 corôa (Dinamarca) o que dá $1.m(E_1)$
tenho $m(E_2)$ moedas de 2 corôas o que dá $2.m(E_2)$
tenho $m(E_3)$ notas de 5 corôas o que dá $5.m(E_3)$, etc.
tenho, portanto, ao todo $S=1.m(E_1)+2.m(E_2)+5.m(E_3)+\cdots$

Os dois modos de proceder conduzirão, certamente, o comerciante ao mesmo resultado, porque, por mais rico que êle seja, só tem um número finito de notas para contar; mas, para nós, que temos que adicionar uma infinidade de indivisíveis, a diferença entre as duas maneiras de proceder é capital.

Trad. H. R.

Nota do Prof. Dr. Ruy Luís Gomes

Representando por $m(E_i)$ a medida (L) do conjunto dos pontos x tais que os valores correspondentes, $f(x)$, estão situados dentro dos limites $y_i < f(x) \leq y_{i+1}$, tem-se em $S=\Sigma\eta_i\, m(E_i)$, com $y_i < \eta_i \leq y_{i+1}$, a soma que conduz ao integral L de $f(x)$

EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geógrafo

379 — Determine m de modo que o trinómio $(m+1)\,x^2-8x+m+1$ seja positivo para qualquer valor real de x. R: m *deve satisfazer à desigualdade* $4^2-(m+1)^2<0$ *donde se deduz* $m>3$ *ou* $m<-5$.

M. Z.

380 — *a)* Indique as condições a que devem satisfazer os coeficientes da equação: $ax+by=c$ para que esta tenha uma infinidade de soluções inteiras e positivas. *b)* Defina permutações de n objectos. Relacione os números de arranjos ${}^{n}A_p$ e ${}^{n+1}A_p$ de n objectos tomados p a p e de $n+1$ objectos tomados p a p.

381 — Sendo 12,12 m o comprimento dos lados dum losango e 6,34 m o comprimento da sua diagonal menor, determine por cálculo logarítmico os valores dos ângulos do losango. R: *Os ângulos são* $30^o19'26''$ *e* $149^o40'34''$.

382 — Verifique a seguinte igualdade:

$$(\cos x+\operatorname{sen} x)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x.$$

R: *Dividindo ambos os termos por* $\cos x+\operatorname{sen} x$ *vem:*

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\operatorname{sen} x),$$

igualdade evidente atendendo a que $\cos\frac{\pi}{4}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

M. Z.

383 — Determine, sem recorrer às tábuas, os valores de $\operatorname{cotg}(-390^o)$ e de $\sec\frac{9}{4}\pi$. R: $\operatorname{cotg}(-390^o)=\operatorname{cotg}330^o=-\operatorname{cotg}30^o=-\sqrt{3}$; $\sec\frac{9\pi}{4}=\sec\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$.

M. Z.

384 — Considere um triângulo ABC, rectângulo em A e designe por a, b e c os comprimentos dos lados opostos aos ângulos A, B e C. Exprima os comprimentos m, m' e m'' das medianas do triângulo em função dos lados. R: $m=\frac{a}{2}$, $m'=\sqrt{c^2+\frac{b^2}{4}}$, $m''=\sqrt{b^2+\frac{c^2}{4}}$.

M. P. R.

385 — Calcule, sem efectuar as operações, o resto da divisão por 4 do número $86\times381^4+74$. Enuncie as regras que usou.

I. S. C. E. F. — 25 de Julho de 1940

386 — *a)* Defina sistema de logarítmos e enuncie as propriedades fundamentais do cálculo logarítmico. Dada a decomposição em números primos dum número $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$ exprima $\log n$ em função de $\log p_1, \log p_2, \cdots \log p_n$. *b)* Calcule por logarítmos $x=\frac{0{,}01^3\sqrt{1{,}002}}{0{,}0004}$. R: $x=0{,}0024973$.

387 — Diga em que consiste o desenvolvimento do binómio de Newton; escreva o têrmo geral e enuncie a lei de passagem dum têrmo para o seguinte. Calcule

$$f(x)=\frac{(x+1)^n+(x-1)^n}{(x+1)^n-(x-1)^n}.$$

388 — São dadas no mesmo plano duas circunferências uma de raio r, outra de raio $3r$; conhecendo o comprimento d da corda comum, calcular a distância dos centros. Discussão R: *Deverá ser* $d\leq 2r$ *para que o problema seja possível. Com* $d<2r$ *o problema tem as duas soluções*

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{36r^2-d^2}+\sqrt{4r^2-d^2}\right) \text{ e } \frac{1}{2}\left(\sqrt{36r^2-d^2}-\sqrt{4r^2-d^2}\right).$$

Com $d=2r$ *há a solução única* $\frac{1}{2}\sqrt{36r^2-d^2}$.

M. P. R.

389 — Num rectângulo de lados L e l tiram-se as bissectrizes dos ângulos interiores. Verificar que os pontos de encontro dessas bissectrizes definem um quadrado e determinar a área dêsse quadrado. R: *A diagonal do quadrado é igual a* $L-1$ *e portanto a sua área será* $\frac{1}{2}(L-1)^2$.

M. P. R.

390 — Num triângulo rectângulo de ângulos agudos B e C exprimir $\operatorname{sen}(B-C)$, $\cos(B-C)$, $\operatorname{tg}(B-C)$ em função dos catetos b e c. R: $\operatorname{sen}(B-C)=\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}$, $\cos(B-C)=\frac{2bc}{b^2+c^2}$, $\operatorname{tg}(B-C)=\frac{b^2-c^2}{2bc}$.

M. P. R.

391 — Determinar os inteiros n tais que a soma $1^2+2^2+\cdots+n^2$ seja divisível por $1+2+\cdots+n$.

Nota: — Sabe-se que $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

R: *O quociente de* $1^2+2^2+\cdots+n^2$, *por* $1+2+\cdots n$ *é* $\frac{2n+1}{3}$. *Deverá pois ser* $2n+1=3(2p+1)$ (p *inteiro*) *e portanto os inteiros* n *a determinar são os sucessores dos múltiplos de* 3.

M. P. R.

ÁLGEBRA SUPERIOR

I. S. C. E. F. — Exame final, Outubro de 1940

392 — Dado o complexo $z=\frac{3}{2+\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta}$ pô-lo sob a forma $x+yi$ e verificar que o lugar dos afixos de z é a circunferência $(x-2)^2+y^2=1$. R:

$$\frac{3}{2+\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta}=\frac{3(2+\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta)}{(2+\cos\theta)^2+\operatorname{sen}^2\theta}=\frac{6+3\cos\theta}{5+4\cos\theta}-\frac{3\operatorname{sen}\theta}{5+4\cos\theta}\,i\,.$$

O lugar geométrico dos afixos é definido paramètricamente pelas equações

$$\begin{cases} x=\dfrac{6+3\cos\theta}{5+4\cos\theta} \\[2ex] y=-\dfrac{3\operatorname{sen}\theta}{5+4\cos\theta} \end{cases}$$

donde, por eliminação de θ, *se deduz*

$$(x-2)^2=\left(\frac{-4-5\cos\theta}{5+4\cos\theta}\right)^2=\frac{16+40\cos\theta+25\cos^2\theta}{(5+4\cos\theta)^2}$$

$$y^2=\frac{9\operatorname{sen}^2\theta}{5+4\cos\theta}$$

$$(x-2)^2+y^2=\frac{16+40\cos\theta+9+16\cos^2\theta}{(5+\cos\theta)^2}=1\,.$$

M. Z.

393 — Estudar e representar geomètricamente a função $y=2\operatorname{sen}^2x-3\cos^2x$.

394 — Calcular as raízes reais da equação $x^4+x-10=0$. As raízes irracionais serão determinadas com um êrro inferior a $\frac{1}{10}$.

F. C. C. — Exames de freqüência, 1938-1939

395 — Achar com duas casas decimais exactas a raíz real da equação: $f(x)=\operatorname{sen}x-2x+1=0$ pelo método de iteração.

396 — Encontrar as condições para que o sistema

$$\begin{cases} x=cy+bz \\ y=az+cx \\ z=bx+ay \end{cases}$$

represente uma linha recta; mostrar que a recta é representada por

$$\frac{x}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{y}{\sqrt{1-b^2}}=\frac{z}{\sqrt{1-c^2}}\,.$$

397 — Resolver a equação

$$\cos a\cos^2x-\operatorname{sen}a\cos\frac{a}{2}\cos x+\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}=0\,.$$

398 — Como aplicação da teoria dos complexos resolver a equação $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^4=\frac{1+ia}{1-ia}$. (Pode fazer-se $x=\operatorname{tg}\varphi$ e $a=\operatorname{tg}\alpha$).

399 — Calcular o limite para $n=\infty$ de $\frac{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}\,n^{\frac{1}{12}}$.

400 — Em que casos são convergentes as séries:

$$\Sigma\, n(n+1)\,x^n \quad \text{e} \quad \Sigma\, x^n \operatorname{sen} n\theta\,?$$

401 — Traçar a curva $y=e^{\frac{1+x}{1-x}}$.

402 — Num triângulo esférico é

$$a=113^0\,2'\,56'',\quad b=82^0\,39'\,28'',40,\quad c=74^0\,54'\,31''.$$

Calcular os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$.

F. C. L. — Alguns exercícios do curso

403 — Expressão geral dos números cujo produto por $a+bi$ é um número real. Mostre que o conjugado de $a+bi$ está contido nesta expressão. Lugar geométrico das imagens. R: *Seja* $x+iy$ *um número complexo tal que o produto* $(a+ib)(x+iy)=z$ (número real). *Ora* $z=(ax-by)+i(ay+bx)$. *Se* z *deve ser real, deve ter-se* $ay+bx=0$ *donde* (1) $\frac{x}{y}=\frac{a}{-b}$. *Sendo* λ *um número real arbitrário será pois* $x=\lambda a$ $y=-\lambda a$. *A expressão geral dos números* $(x+iy)$ *será então* (2) $x+iy=\lambda a-\lambda bi$. *O conjugado de* $a+bi$ *está contido nesta expressão: corresponde a* $\lambda=1$.

Lugar geométrico das imagens: *Êste lugar geométrico tem por equação, no plano* XOY, *a equação* (1). *É pois uma recta definida pela origem* (0,0) *e pela imagem do conjugado de* $a+bi$.

V. B.

404 — Escreva a expressão geral dos números cujo cociente por $a+bi$ é um imaginário puro. Lugar geométrico das imagens. R: *Procuramos a expressão geral dos números* $(x+iy)$ *tais que* $\frac{x+iy}{a+ib}=\lambda i$ *onde* λ *é um número real arbitrário. Logo,* $x+iy=-\lambda b+\lambda ai$ *ou* $kb-kai$ $(k=-\lambda)$. *Vê-se fàcilmente que o lugar geométrico das imagens dos números* $(x+iy)$ *é uma recta que passa pela origem e é perpendicular ao segmento orientado* OM, *que define o número* $a+bi$.

V. B.

405 — Extraia algèbricamente a raiz quadrada a $a+bi$ e aproveite o resultado para: 1.º Provar que as raízes quadradas do conjugado de um número são respectivamente conjugadas das raízes quadradas dêsse número. 2.º Extrair algèbricamente a raíz quadrada a $1+i\sqrt{3}$ e a $1-i\sqrt{3}$. R: *Seja* $x+iy$ *uma raiz quadrada de* $a+bi$. *Teremos, por definição* $(x+iy)^2=a+bi$ *ou* $(x^2-y^2)+i2xy=a+bi$. *Portanto:*

$$(1)\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x^2+(-y^2)=a \\ x^2(-y^2)=-\dfrac{b^2}{4} \end{cases}$$ *o que mostra serem*

x^2 *e* $-y^2$ *as raizes da equação* (2) $u^2 - au - \frac{b^2}{4} = 0$ *que admite duas raizes reais* $\left(-\frac{b^2}{4} < 0\right)$. *Resolvendo a equação, obtemos* $u = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. *Por conseguinte*

$$(3)\quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\[2mm] y^2 = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\[2mm] y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}. \end{cases}$$

A 2.ª expressão (1) *mostra que* xy *tem o sinal de* b *e que portanto* x *e* y *têm o mesmo sinal ou sinais contrários conforme* $b \gtrless 0$. *Das 4 combinações possíveis de sinais em* (3) *só duas conduzem pois a soluções do problema. O número* $a+bi$ *tem portanto duas raizes quadradas que são*

$$(4)\qquad \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b_2}}{2}} + i\varepsilon\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right]$$

onde $\varepsilon = +1$ *se* $b > 0$, $\varepsilon = -1$ *se* $b < 0$.

Conclusões: 1.ª *Dados os números* $a+bi$ *e* $a-bi$, *para um dêles é* $\varepsilon = 1$ *e para o outro* $\varepsilon = -1$.

A expressão (4) *mostra que* $a+bi$ *e* $a-bi$ *têm raizes quadradas respectivamente conjugadas.* 2.ª *Para o número* $1+i\sqrt{3}$ *é* $\varepsilon = 1$, *e as expressões* (4) *dão, para as suas raizes quadradas, os valores:* $\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $-\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. *As raizes quadradas de* $1-i\sqrt{3}$ *serão* $\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $-\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

V. B.

406 — Prove que todo o complexo de módulo 1 se pode pôr na forma $\frac{1+ix}{1-ix}$ com x real. R: *O problema equivale ao seguinte: Prove que, dado um complexo qualquer de módulo* 1, $\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi$ *se pode determinar sempre um número real* x, *em função de* φ, *tal que* $\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{1+ix}{1-ix}$.

1.º modo de resolução: *Sendo* x *real, o complexo* $\frac{1+ix}{1-ix}$ *tem efectivamente o módulo* 1 *pois que* $\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1$. *Sendo* α *um argumento de* $1+ix$ *é* $-\alpha$ *um argumento de* $1-ix$, *seu conjugado. Um argumento do cociente é pois* $\alpha - (-\alpha) = 2\alpha$. *Teremos* $2\alpha = \varphi + 2k\pi$ *donde* $\alpha = \frac{\varphi}{2} + k\pi$ *e portanto*

(1) $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$. *Mas, visto ser* α *um argumento de* $1+ix$, *temos* (2) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{a} = x$. *Atendendo a* (1) $x = \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$.

2.º modo de resolução: *Temos, se* x *é real* $\frac{1+ix}{1-ix} = \frac{1-x^2}{1+x^2} + i\frac{2x}{1+x^2} = \cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi$ (*verifica-se fàcilmente que* $a^2+b^2=1$)

$$(3)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \\[2mm] \mathrm{sen}\,\varphi = \dfrac{2x}{1+x^2}. \end{cases}$$

Mas, sendo

$\cos\varphi = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}}$ *e* $\mathrm{sen}\,\varphi = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}}$, *e atendendo a* (3), *vemos que terá de pôr-se, para satisfazer ao problema* $x = \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$.

V. B.

407 — Onde deve estar a imagem M dum número z para que, sendo M_1 e M_2 as imagens de z_1 e z_2, o cociente $\frac{z-z_1}{z-z_2}$

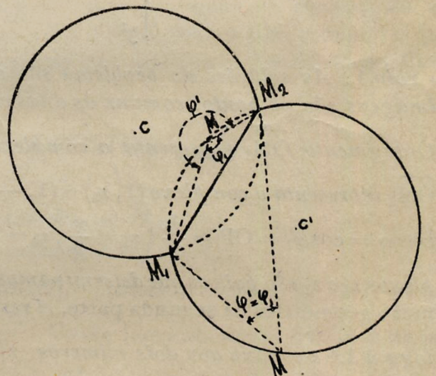
1.º seja real?

2.º seja imaginário puro?

3.º tenha um argumento dado φ?

R: *Escrevamos o cociente na forma* $\frac{z_1-z}{z_2-z}$ *e notemos que* $z_1 - z$ *é representada pelo segmento* $\overrightarrow{MM_1}$ *e que* $z_2 - z$ *é representada pelo segmento* $\overrightarrow{MM_2}$. *O cociente tem por módulo* $\frac{MM_1}{MM_2}$ *e tem por argumento um dos ângulos* α *que* $\overrightarrow{MM_1}$ *forma com* $\overrightarrow{MM_2}$ (*suporemos* $\alpha > 0$ *e portanto contado no sentido directo de* $\overrightarrow{MM_2}$ *para* $\overrightarrow{MM_1}$).

Nestas condições: 1.º *O cociente é real se* $\alpha = k\pi$, *isto é, se* M *é colinear com* M_1 *e* M_2. 2.º *O cociente é imaginário puro se* $\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($\alpha = 90°$ *ou* $\alpha = 270°$). *Então* M *deve estar sôbre a circunferência que tem* M_1M_2 *por diâmetro.* 3.º *Suponhamos que* φ' *é o argumento positivo mínimo que corresponde ao argumento dado* φ *e designemos por* φ_1 *o ângulo* φ' *se* $0 < \varphi' < 180°$ *e o ângulo* $\varphi' - 180°$ *se* $180° < \varphi' < 360°$. *Construam-se os dois segmentos capazes do ângulo* φ_1 *e passando por* M_1 *e* M_2. *Os segmentos são simétricos relativamente à recta* M_1M_2 *e tem-se* $M_1\widehat{C}M_2 = M_1\widehat{C'}M_2 = 2\varphi_1$. *Então: se* $\varphi' < 180°$, M *está sôbre aquêles dois segmentos do qual se veja* M_1 *à esquerda de* M_2. *Se* $\varphi' > 180°$, M *está sôbre aquêle dos dois segmentos do qual se veja* M_1 *à direita de* M_2.



Nota — Se $\varphi_1 < 90°$ os dois segmentos são os traçados a ponteado. Se $\varphi_1 > 90°$ os dois segmentos são os traçados a cheio.

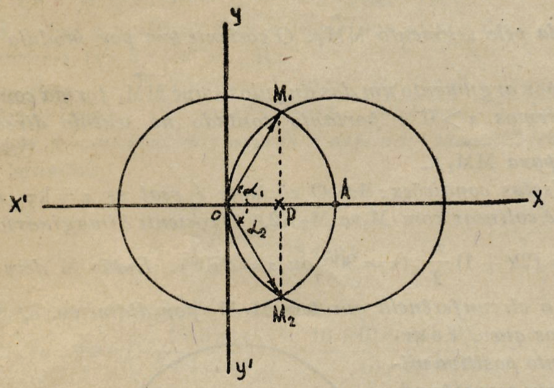
V. B.

408 — Determine um número z de modo que z, $\frac{1}{z}$ e $1-z$ tenham módulos iguais. Idêntica questão com z, $\frac{1}{z}$ e $1+z$. Resolva também geomètricamente o problema. R: Resolução algébrica da primeira parte: *Pondo* $z = \rho(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ *teremos* $\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}(\cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ *e* $1-z = (1-\rho\cos\alpha) - i\rho\,\mathrm{sen}\,\alpha$. *Se* $\left|\frac{1}{z}\right| = |z|$ *será* $\frac{1}{\rho} = \rho$ *donde* $\rho = 1$. *Temos ainda:*

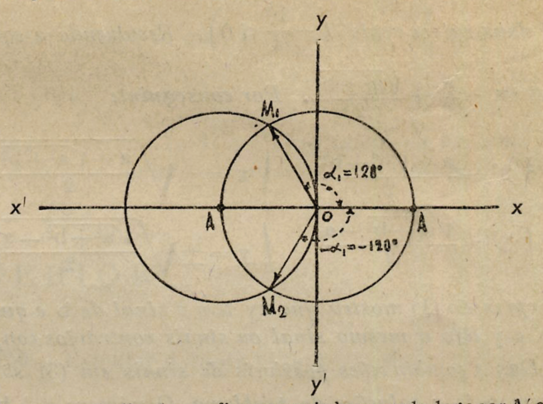
$|1-z| = (1-\cos\alpha)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha = 2 - 2\cos\alpha$. *E como tem de ser* $|1-z| = 1$, *será* $2 - 2\cos\alpha = 1$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. *Logo* $\alpha = \pm\frac{\pi}{3}$.

Há, por conseguinte, duas soluções: (1) $\begin{cases} z = \cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \\ z = \cos\frac{\pi}{3} - i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}. \end{cases}$

Resolução geométrica. *Provámos fàcilmente que* $\rho = 1$, *a partir da condição* $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$. *As imagens de todos os complexos tais que* $\rho = 1$, *são os pontos da circunferência de centro na origem e raio* 1. *Por outro lado,* $1 - z$ *deve ter o módulo* 1. *Ora, sendo* A *a imagem de* 1 *e* M *a de* z, $1 - z$ *é representado pelo segmento orientado* $\overrightarrow{AM}$. *As imagens* M *de todos os números* z *tais que* $|1-z| = 1$ *estão pois sôbre a circunferência de centro* A



e raio 1. *As soluções do problema são os dois números cujas imagens são os pontos comuns às duas circunferências citadas. O segmento* $\overrightarrow{OM_1}$ *representa o complexo* $(1, \alpha_1)$. *O segmento* $\overrightarrow{OM_2}$ *representa o complexo* $(1, \alpha_2) = (1, -\alpha_1)$. *Da figura tira-se* $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = OP = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 = \frac{\pi}{3}, \alpha_2 = -\frac{\pi}{3}\right)$. *Os dois complexos* z_1 *e* z_2 *são pois os que determinámos algèbricamente.* Resolução geométrica da segunda parte. *A resolução algébrica é análoga à* 1.ª *e conduz aos dois números* $z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$ *e* $z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} - i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$ (2). *As imagens dos números* z *tais que* $|z| = 1$ *estão na circunferência de raio* 1 *e centro* O, *como vimos. Notemos agora que* $1 + z = 1 - (-z)$ *e que, por conseguinte, as imagens dos números tais que* $|1+z| = |1-(-z)| = 1$ *estão sôbre a circunferência de centro* A' *e raio* 1, *simétrica da circunferência* A *relativamente a* O, *visto que as imagens*



(N. B. Dos pontos indicados na figura o mais à esquerda deve ser A' e não A)

dos números $-z$ *devem estar, como vimos, na circunferência de centro* A *e raio* 1. *As soluções* z_1 *e* z_2 *são os afixos dos pontos* M_1 *e* M_2, *os quais afixos são bem os complexos* (2).

V. B.

409 — Resolva a equação $(x+1)^m - (x-1)^m = 0$ (m inteiro positivo). R: *A equação dada pode escrever-se* $mx^{m-1} + \binom{m}{3}x^{m-3} + \binom{m}{5}x^{m-5} + \cdots = 0$, *ou ainda* $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m = 1$ *donde* $\frac{x+1}{x-1} = \sqrt[m]{1} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ $\left(\theta = \frac{2k\pi}{m}\right)$. *A equação decompõe-se assim em* m *equações lineares em* x. *Uma porém destas equações é impossível — a que corresponde a* $\theta = 0$ *ou ao valor* 1 *de* $\sqrt[m]{1}$.

Temos pois: $\frac{x+1}{x-1} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$; $x(1 - \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta) = -\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta - 1$; $x = \frac{\cos\theta + 1 + i\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - 1 + i\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - 1}i = -\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\cdot i$.

As soluções são então dadas por $x = -\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\cdot i$ *com* $\theta = \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \frac{6\pi}{m}, \ldots, \frac{2(m-1)\pi}{m}$, *por exemplo.*

M. Z.

410 — Resolva a equação $(x+i)^m - (x-i)^m = 0$.

411 — Resolva $(1+\sqrt{1-x^2})^m - (1-\sqrt{1-x^2})^m = 0$.

412 — Resolva $(1+\sqrt{x^2-1})^m - (1-\sqrt{1-x^2})^m = 0$.

A resolução da equação **410** é análoga à do n.º **409**; **411** e **412** reduzem-se ao mesmo tipo fazendo $\sqrt{1-x^2} = z$.

M. Z.

Os exercícios 405 a 412 foram cedidos à Redacção pelo assistente Dr. Vergílio S. Barroso.

ANÁLISE SUPERIOR

F. C. L. — Exame final, Julho de 1939

413 — Calcule $\int_{-2-i}^{-2+i} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^2\sqrt{(z+2)^2+1}}$.

414 — Determine o integral geral da equação $x(x-y') + y(1-y) = 0$ de que é integral particular $y = x$.

415 — Aplique o teorema dos resíduos ao cálculo de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+5)^2(3x^2+1)}.$$

416 — Determine o integral geral da equação $(3+x)^3y''' + (3+x)^2y'' + 2(3+x)y' - 2y = 0$.

417 — Determine o sistema de integrais gerais do sistema:

$$\begin{cases} 2y' - z' + 3y - z = x \\ y' + 2z' + y - 3z = 1. \end{cases}$$

418 — Determine os extrêmos do integral $\int_{x_1}^{x_2} y'^2\,dx$ sob a condição de ser $\int_{x_1}^{x_2} xy\,dx = 1$ sendo $x_1 = 0$ $y_1 = 2$, $x_2 = 1$ $y_2 = 0$.

F. C. C. — Exame final, Julho de 1939

419 — Seja $f(z)$ uma função holomorfa no interior da região R, de contôrno C, e seja z_0 um ponto interior a C. Provar que $f(z)$ necessàriamente se anula dentro de R quando se tenha, sôbre C, $|f(z)|>|f(z_0)|$.

420 — Sejam $I_1, I_2, \cdots I_n, \cdots$ $[I_n=(\alpha_n, \beta_n)]$ os intervalos contíguos a um conjunto C, de medida nula, perfeito e não-denso no intervalo $(0,1)$. Pondo $f(0)=0$, $f(1)=1$ e, em geral,

$$f(x)=\sum_0^x(\beta_n-\alpha_n) \quad \text{para} \quad 0<x<1,$$

abrangendo o somatório apenas os intervalos I_n situados no interior do intervalo $(0,x)$, pregunta-se:

¿É $f(x)$ de variação limitada? ¿Absolutamente contínua? Derivável? Achar os derivados à direita e integrá-los em $(0,x)$.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. L. — Exame final, 1939 (Alguns exercícios)

421 — Determinar os pontos singulares da curva

$$y^2=(2-x)^2(1-x).$$

422 — Calcule $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{\cos x\,(1-2\cos x)}\,dx$.

423 — Calcule o integral geral de $xy^2\,dy=(x^3+y^3)\,dx$.

424 — Transforme a equação $\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2-\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ noutra em que as variáveis independentes x e y sejam substituídas pelas novas variáveis t e z relacionadas com as primeiras por $x=z^2+t^2$ $y=t^2-z^2$.

425 — Dadas as funções u e z de x e y definidas pelo sistema $\begin{cases} xz-\log u+e^y=0 \\ uz-y^2=0 \end{cases}$, calcule $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$.

426 — Calcule $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{5x-6-x^2}}$.

427 — Calcule o integral geral de $y^2\left[1-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]=3$.

428 — Calcule a área limitada pela curva $y^2=4x^2-x^4$.

429 — Calcule o volume gerado pela rotação em tôrno de OY da curva $x^2=y^3-4y$.

430 — Calcule $\int x\log(x^4-1)\,dx$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

431 — *a)* Determinar o coeficiente-função (escalar) $\mu(x)$ do vector x de um espaço E por maneira que a transformação $x'=Tx=x+\mu(x).a$ seja (separadamente) ortogonal, hermítica, unitária, de projecção. *b)* Estudar igualmente o caso em que T se reduz a uma simetria. Qual é o hiperplano da simetria? O vector a pode ser qualquer? *c)* Indicar em todos os casos as constantes e os vectores fundamentais de T.

Indicação: partir do produto interno (x, y) de dois vectores de E_n. *Nota:* — O caso da simetria encontra-se em *Leçons sur la théorie des Spineurs*, E. Cartan, pág. 12, 13. R. L. G.

432 — Mostre que, de todos os rectângulos que podem inscrever-se numa elipse, tem a área máxima o que tem por lados as diagonais dos quadrados construídos sôbre os semi-eixos da elipse.

RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

209 — Pela aplicação do método de Fubini virá:

$$\int\frac{(x-a)\,(x-b)}{(x-c)^2\,(x-d)^2}\,dx=M\log(x-c)+N\log(x-d)+\frac{Ox+P}{(x-c)\,(x-d)}$$

em que M, N, O, P são constantes a determinar.

Para que a primitiva se reduza a uma função racional, terá que ser necessàriamente $M=N=0$, logo:

$$\int\frac{(x-a)\,(x-b)}{(x-c)^2\,(x-d)^2}\,dx=\frac{Ox+P}{(x-c)\,(x-d)}.$$

Derivando esta igualdade vem:

$$\frac{(x-a)\,(x-b)}{(x-c)^2\,(x-d)^2}=\frac{O\,(x-c)\,(x-d)-(Ox+P)\,(2x-c-d)}{(x-c)^2\,(x-d)^2}$$

donde

$$(x-a)\,(x-b)=O\,(x-c)\,(x-d)-(Ox+P)\,(2x-c-d)$$

$$x^2-(a+b)\,x+ab=-Ox^2-2Px+Ocd+P\,(c+d).$$

Identificando: $O=-1$, $-(a+b)=-2P$, $ab=Ocd+P(c+d)$, e eliminando O e P vem:

$$ab=-cd+\frac{(a+b)\,(c+d)}{2} \quad \text{ou} \quad 2\,(ab+cd)=(a+b)\,(c+d).$$

O. MORBEY RODRIGUES

210 — Seja $abcde$ o conjunto pedido. Em qualquer base $(abcde)=(a0000)+(bcde)$ e $(a0000)>(bcde)$; portanto, se fôr $(a0000)=N$, será $(bcde)=\theta N$ e $0\leq\theta<1$ em que θ é função não crescente da base considerada, para cada sistema $abcde$. Seja k a razão dos valores do número $(a0000)$ na base x considerada e na base 10. Se fôr $M=a.10^4$ teremos

$$(abcde)_{10}=M\,(1+\theta) \qquad 0\leq\theta'\leq\theta<1.$$
$$(abcde)_x=kM\,(1+\theta')$$

A equação $(abcde)_x=2(abcde)_{10}$ escreve-se $kM(1+\theta')=2M(1+\theta)$ ou $k=\dfrac{2(1+\theta)}{1+\theta'}$. Vê-se imediatamente que terá de ser $2<k<4$.

Ora $k=\left(\dfrac{x}{10}\right)^4=\dfrac{x^4}{10000}$.

Temos $11^4=14641<20000$, $12^4=20736$, $13^4=28561$, $14^4=38416$, $15^4=50625>40000$.

As únicas bases possíveis são pois $x=12, 13, 14$.

O problema consiste em resolver em números inteiros positivos e menores que 10 as equações $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=2\,(a.10^4+b10^3+c.10^2+d10+e)$ em que x tome os valores $12, 13, 14$ e a, b, c, d, e são as incógnitas.

Para $x=12$ a equação toma a forma $736a-272b-56c-8d-e=0$.

Parametrando, a solução geral pode escrever-se:

$$a=u+v+7w-t,\quad b=t,\quad c=13u+13v+92w-18t,\quad d=v,\quad e=8u.$$

A discussão das soluções desta equação forneceria tôdas as soluções do problema dado, para $x=12$. Anàlogamente se obteriam as soluções para $x=13$, $x=14$.

Por exemplo, para $u=0$, $v=2$, $t=1$, $w=0$ temos a solução $(11820)_{12}=2.(11820)_{10}$.

M. A.