F. C. C. — Exame final, Julho de 1939

419 — Seja $f(z)$ uma função holomorfa no interior da região R, de contôrno C, e seja z_0 um ponto interior a C. Provar que $f(z)$ necessàriamente se anula dentro de R quando se tenha, sôbre C, $|f(z)|>|f(z_0)|$.

420 — Sejam $I_1, I_2, \cdots I_n, \cdots$ $[I_n=(\alpha_n, \beta_n)]$ os intervalos contíguos a um conjunto C, de medida nula, perfeito e não-denso no intervalo $(0,1)$. Pondo $f(0)=0$, $f(1)=1$ e, em geral,

$$f(x)=\sum_0^x (\beta_n-\alpha_n) \quad \text{para} \quad 0<x<1,$$

abrangendo o somatório apenas os intervalos I_n situados no interior do intervalo $(0,x)$, pregunta-se:

¿É $f(x)$ de variação limitada? ¿Absolutamente contínua? Derivável? Achar os derivados à direita e integrá-los em $(0,x)$.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. L. — Exame final, 1939 (Alguns exercícios)

421 — Determinar os pontos singulares da curva

$$y^2=(2-x)^2(1-x).$$

422 — Calcule $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{\cos x\,(1-2\cos x)}\,dx$.

423 — Calcule o integral geral de $xy^2\,dy=(x^3+y^3)\,dx$.

424 — Transforme a equação $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=0$ noutra em que as variáveis independentes x e y sejam substituídas pelas novas variáveis t e z relacionadas com as primeiras por $x=z^2+t^2$ $y=t^2-z^2$.

425 — Dadas as funções u e z de x e y definidas pelo sistema $\begin{cases} xz-\log u+e^y=0 \\ uz-y^2=0, \end{cases}$ calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$.

426 — Calcule $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{5x-6-x^2}}$.

427 — Calcule o integral geral de $y^2\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=3$.

428 — Calcule a área limitada pela curva $y^2=4x^2-x^4$.

429 — Calcule o volume gerado pela rotação em tôrno de OY da curva $x^2=y^3-4y$.

430 — Calcule $\int x\log(x^4-1)\,dx$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

431 — *a*) Determinar o coeficiente-função (escalar) $\mu(x)$ do vector x de um espaço E por maneira que a transformação $x'=Tx=x+\mu(x).a$ seja (separadamente) ortogonal, hermítica, unitária, de projecção. *b)* Estudar igualmente o caso em que T se reduz a uma simetria. Qual é o hiperplano da simetria? O vector a pode ser qualquer? *c)* Indicar em todos os casos as constantes e os vectores fundamentais de T.

Indicação: partir do produto interno (x, y) de dois vectores de E_n. *Nota:* — O caso da simetria encontra-se em *Leçons sur la théorie des Spineurs*, E. Cartan, pág. 12, 13. R. L. G.

432 — Mostre que, de todos os rectângulos que podem inscrever-se numa elipse, tem a área máxima o que tem por lados as diagonais dos quadrados construídos sôbre os semi-eixos da elipse.

RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

209 — Pela aplicação do método de Fubini virá:

$$\int \frac{(x-a)\,(x-b)}{(x-c)^2\,(x-d)^2}\,dx=M\log(x-c)+N\log(x-d)+\frac{Ox+P}{(x-c)\,(x-d)}$$

em que M, N, O, P são constantes a determinar.

Para que a primitiva se reduza a uma função racional, terá que ser necessàriamente $M=N=0$, logo:

$$\int \frac{(x-a)\,(x-b)}{(x-c)^2\,(x-d)^2}\,dx=\frac{Ox+P}{(x-c)\,(x-d)}.$$

Derivando esta igualdade vem:

$$\frac{(x-a)\,(x-b)}{(x-c)^2\,(x-d)^2}=\frac{O\,(x-c)\,(x-d)-(Ox+P)\,(2x-c-d)}{(x-c)^2\,(x-d)^2}$$

donde

$$(x-a)\,(x-b)=O\,(x-c)\,(x-d)-(Ox+P)\,(2x-c-d)$$
$$x^2-(a+b)\,x+ab=-Ox^2-2Px+Ocd+P(c+d).$$

Identificando: $O=-1$, $-(a+b)=-2P$, $ab=Ocd+P(c+d)$; e eliminando O e P vem:

$$ab=-cd+\frac{(a+b)\,(c+d)}{2} \quad \text{ou} \quad 2\,(ab+cd)=(a+b)\,(c+d).$$

O. MORBEY RODRIGUES

210 — Seja *abcde* o conjunto pedido. Em qualquer base $(abcde)=(a0000)+(bcde)$ e $(a0000)>(bcde)$; portanto, se fôr $(a0000)=N$, será $(bcde)=\theta N$ e $0\le\theta<1$ em que θ é função não crescente da base considerada, para cada sistema *abcde*. Seja k a razão dos valores do número $(a0000)$ na base x considerada e na base 10. Se fôr $M=a.10^4$ teremos

$$\begin{aligned}(abcde)_{10}&=M\,(1+\theta)\\ (abcde)_x&=kM\,(1+\theta')\end{aligned} \qquad 0\le\theta'\le\theta<1.$$

A equação $(abcde)_x=2(abcde)_{10}$ escreve-se $kM(1+\theta')=2M(1+\theta)$ ou $k=\frac{2(1+\theta)}{1+\theta'}$. Vê-se imediatamente que terá de ser $2<k<4$.

Ora $k=\left(\frac{x}{10}\right)^4=\frac{x^4}{10000}$.

Temos $11^4=14641<20000$, $12^4=20736$, $13^4=28561$, $14^4=38416$, $15^4=50625>40000$.

As únicas bases possíveis são pois $x=12, 13, 14$.

O problema consiste em resolver em números inteiros positivos e menores que 10 as equações $ax^4+bx^3+cx^2+dc+c=2\,(a\,.\,10^4+b10^3+c\,.\,10^2+d10+c)$ em que x tome os valores $12, 13, 14$ e a, b, c, d, e são as incógnitas.

Para $x=12$ a equação toma a forma $736a-272b-56c-8d-e=0$.

Parametrando, a solução geral pode escrever-se:

$$a=u+v+7w-t,\quad b=t,\quad c=13u+13v+92w-18t,\quad d=v,\quad e=8u.$$

A discussão das soluções desta equação forneceria tôdas as soluções do problema dado, para $x=12$. Anàlogamente se obteriam as soluções para $x=13$, $x=14$.

Por exemplo, para $u=0$, $v=2$, $t=1$, $w=0$ temos a solução $(11820)_{12}=2\,.\,(11820)_{10}$.

M. A.