1.º ANO - N.º 3 JUNHO DE 1940

GAZETA DE MATEMÁTICA

Redacção e Administração: Faculdade de Ciências — Rua da Escola Politécnica — Lisboa

EDITOR: JOSÉ DUARTE DA SILVA PAULO

Composto e impresso na Soc. Industrial de Tipografia, Limitada R. Almirante Pessanha, 3 e 5 - Lisboa

Aplicação das propriedades do trinómio do 2.º grau à determinação de alguns problemas de Máximos e Mínimos

O estudo das propriedades do trinómio do 2.º grau fornece matéria para a resolução de muitos problemas quer de álgebra quer de geometria entre os quais problemas de máximos e mínimos do tipo dos que têm sido propostos nos exames de aptidão ao Instituto Superior Técnico.

Como geralmente o assunto não é tratado nos liceus, exporemos aqui o caminho a seguir para a resolução de tais problemas, aplicando simplesmente conhecimentos adquiridos na 7.ª classe dos liceus.

Suponhamos que se pretende resolver o seguinte problema: *Dado um circulo de raio igual a 5 inscrever nêle um rectângulo de área igual a 48*.

Se forem x e y os lados do rectângulo, as equações que resolvem o problema são: $xy=48$ e $x^2+y^2=(2.5)^2$. Se multiplicarmos ambos os membros da primeira equação por 2, e lhe adicionarmos ordenadamente a segunda, obtém-se o sistema equivalente: $xy=48$ e $x+y=\sqrt{100+96}$. Êste sistema é ainda equivalente à equação $X^2-14X+48=0$ cujas soluções são $x=6$ e $y=8$. É evidente que não podemos dar arbitràriamente a área do rectângulo, pois que, se ela pode ser tão pequena quanto se quizer, não pode no entanto ultrapassar, por exemplo, a área do círculo. Poderá portanto acontecer, e acontece, que dentre todos os rectângulos que podem inscrever-se no círculo dado haja um cuja área seja a maior de tôdas. Procuremos então resolver êste problema: *Dado um circulo de raio* R *inscrever nêle um rectângulo cuja área seja máxima.*

Começamos por pôr em equação o seguinte problema: determinar um rectângulo de área S inscrito num circulo de raio R.

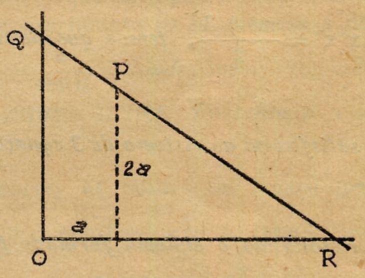
Duma maneira análoga à precedente somos conduzidos a resolver a equação $X^2-\sqrt{4R^2+2S}\,X+S=0$, cujas soluções são os lados x e y do rectângulo procurado. O problema terá ou não soluções conforme os valores de S. Exprimindo que as soluções desta equação são reais tem-se a limitação procurada. Com efeito, para que esta equação tenha soluções reais, é necessário e suficiente que o descriminante seja positivo ou nulo, isto é, $\Delta=4R^2+2S-4S\geq 0$ donde se tira $S\leq 2R^2$. Quere dizer S não pode exceder $2R^2$ e o máximo valor que S pode ter é $2R^2$. Neste caso $\Delta=0$ e portanto $x=y=R\sqrt{2}$. Vê-se assim que o rectângulo de área máxima é o quadrado inscrito no círculo de raio R. Fica pois determinado o máximo valor que pode tomar a área do rectângulo.

É êste o método que devemos empregar na resolução de problemas dêste género e que consiste em determinar as equações do problema de modo a sermos conduzidos a uma equação do 2.º grau (no caso em que isso é possível) e procurar as condições para que a equação tenha soluções reais; estas condições fornecem-nos as limitações que dão os valores procurados.

Vejamos outro exemplo: *É dado um ponto* P *às distâncias* a *e* 2a *dos dois lados de um ângulo recto, e dada uma recta qualquer passando por* P; *mostrar que a área do triângulo compreendido entre a recta e os lados do ângulo nunca pode ser inferior a* $4a^2$.

(Exame de aptidão ao I. S. T. — Ponto modêlo)

Na figura vê-se que o triângulo cuja área pretende determinar-se é QOR. Seja $OR=x$ e $OQ=y$. Será então a área $S=\frac{1}{2}xy$ e como $\frac{y}{2a}=\frac{x}{x-a}$ é $y=\frac{2ax}{x-a}$ e $S=\frac{x}{2}\cdot\frac{2ax}{x-a}=\frac{ax^2}{x-a}$ donde $ax^2-Sx+aS=0$.



Para que haja soluções reais deve ser $\Delta=S^2-4a^2S\geq 0$ ou $S(S-4a^2)\geq 0$ e como S é positivo, por se tratar duma área, será $S-4a^2\geq 0$ e $S\geq 4a^2$. Portanto a área será sempre maior e no *mínimo* igual a $4a^2$.

Dêmos ainda exemplos dum outro tipo de problemas que se resolvem pelo mesmo processo. Seja o seguinte problema: *¿ Qual é o menor valor que pode tomar a expressão* $3x^2-8x+7$ *quando se atribue a* x *valores reais?* Seja K o valor do trinómio, é então $3x^2-8x+7=K$ ou $3x^2-8x+7-K=0$. A condição para que as soluções desta equação sejam reais é $\Delta=64-12(7-K)\geq 0$ ou $K\geq\frac{5}{3}$ quere dizer, o trinómio toma sempre valores superiores e no *mínimo* é igual a $\frac{5}{3}$, valor que corresponde a $x=\frac{4}{3}$.

Vejamos outro exemplo: *Determinar o máximo e o mínimo de* $\frac{2x^2+3x+2}{x^2+x+1}$. Como o numerador e o denominador têm raízes complexas, são sempre positivos para valores reais de x e então fazendo a fracção igual a K, desembaraçando de denominador e simplificando vem $(2-K)x^2+(3-K)x+(2-K)=0$.

A condição para que as soluções sejam reais é $3K^2-10K+7\leq 0$; como êste trinómio tem as raízes -1 e $\frac{7}{3}$, aquela condição é verificada para $K\leq\frac{7}{3}$ e então $K=\frac{7}{3}$ é um *máximo;* ou para $K\geq -1$ e $K=-1$ é um *mínimo.*

Damos a seguir o enunciado de alguns problemas que podem resolver-se por êste processo.

I — Mostrar que o perímetro $2p$ de um rectângulo inscrito num círculo de raio R não pode exceder $4R\sqrt{2}$.

II — Mostrar que o produto de dois números positivos, cuja soma é constante, é máximo quando os dois números forem iguais.

III — Mostrar que a soma de dois números positivos, cujo produto é constante, é mínima quando os números forem iguais.

IV — De todos os triângulos rectângulos com o mesmo perímetro $2p$, qual é aquêle cuja superfície m^2 é máxima? E de todos os triângulos rectângulos cuja área é constante qual é o de perímetro mínimo?

V — Qual é o maior rectângulo que se pode inscrever num quadrado dado?

VI — Determinar os máximos e mínimos de $\frac{x^2-6x-1}{x^2+2x+3}$.

J. SILVA PAULO

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

ANO DE 1939

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geógrafo

I

213 — ¿ Para que valores de m diferem duma unidade as raízes da equação $2x^2-(m^2+1)x+m^2+3=0$. *Sejam* x' *e* x'' *as raízes da equação dada. Trata-se de determinar* m *de tal maneira que* $x'-x''=1$. *Como a equação dada é equivalente ao sistema de duas equações:* $x'+x''=\frac{m^2+1}{2}$, $x'x''=\frac{m^2+3}{2}$, *temos que determinar os valores de* m *que satisfazem ao sistema de 3 equações*

$$\begin{cases} x'-x''=1 \\ x'+x''=\dfrac{m^2+1}{2} \\ x'x''=\dfrac{m^2+3}{2} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema formado pelas duas primeiras equações em ordem a x' *e* x'' *acha-se*: $x'=\frac{m^2+3}{4}$ *e* $x''=\frac{m^2-1}{4}$; *valores que substituídos na 3.ª equação nos conduzem à equação do 4.º grau em* m: $(m^2+3)(m^2-1)=8(m^2+3)$, *cujas soluções são* $m=\pm\sqrt{-3}$ *e* $m=\pm 3$, *valores que substituídos na equação dada conduzem às equações* $2x^2-10x+12=0$ *e* $x^2+x=0$. *Em vez da equação* $x'-x''=1$ *podíamos ter considerado a equação* $x'-x''=-1$, *mas como é fácil de ver o resultado obtido seria o mesmo.*

214 — Defina arranjos e permutações.

215 — Aplique a fórmula do binómio de Newton ao desenvolvimento de $(x-1)^4$. *Temos* $(x-1)^4=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$.

216 — Dados o cateto $c=216^m,7$ dum triângulo rectângulo e o ângulo $B=36°\,27'\,14''$, que se opõe ao outro cateto, calcule por logaritmos o comprimento da hipotenusa a do triângulo. *Como* $c=a\cos B$ *tem-se* $a=\frac{c}{\cos B}$ *e portanto* $\log a=\log c+\operatorname{colog}\cos B$. *Vê-se pelas tábuas que* $\log c=2{,}33586$, $\log\cos B=\bar{1}{,}90537$ *e portanto* $\log a=2{,}33586+0{,}09463=2{,}43049$, *dande se tira ainda pelas tábuas que* $a=269^m,5$.

217 — Calcule, sem recorrer às tábuas de logaritmos, os valores de $x=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ e $y=\operatorname{tg}495°$. *Será* $x=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *(basta notar que* $\cos 45°$ *é igual a metade do lado do quadrado inscrito num círculo de raio* 1). $y=\operatorname{tg}495°=\operatorname{tg}(360°+135°)=\operatorname{tg}(135°)=-\operatorname{tg}45°=-1$, *visto que* $\cos 45°=\operatorname{sen}45°$.

218 — Sabendo que o lado do triângulo eqüilátero inscrito na circunferência de raio r tem por comprimento $r\sqrt{3}$, deduza do círculo trigonométrico o valor de $\operatorname{sen}60°$. *Como se sabe o círculo trigonométrico é um círculo de raio* $OA=1$. *Se* MM' *fôr o lado do triângulo inscrito neste círculo será* $MM'=\sqrt{3}$. *Como o ângulo* $M\hat{O}M'=120°$, *traçando a perpendicular* OA *a* MM', *será* $M\hat{O}A=60°$ *e* $\operatorname{sen}60°=\frac{MM'}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

219 — Demonstre que se duas secantes se cruzam no ponto de contacto de duas circunferências tangentes, as cordas que unem os pontos em que as secantes encontram cada uma das circunferências são paralelas. *Consideremos duas circunferências tangentes em* O, *seja* TT' *a tangente comum,* AA' *e* BB' *as duas secantes a que se refere o enunciado. Para provar que as cordas* AB *e* $A'B'$ *são paralelas basta provar que os ângulos* $B'\hat{A}'O$ *e* $B\hat{A}O$ *são iguais. Ora* $B\hat{A}O=B\hat{O}T$ *visto que* $B\hat{A}O$ *está inscrito no arco* $\overset{\frown}{OB}$ *e que* $B\hat{O}T$ *é um ângulo dum segmento que tem por medida metade da medida de* $\overset{\frown}{OB}$. *Do mesmo modo se vê que:* $B'\hat{A}'O=B'\hat{O}T'$. *Como* $B\hat{O}T=B'\hat{O}T'$ *porque se trata de dois ângulos verticalmente opostos, têm-se* $B\hat{A}O=B'\hat{A}'O$ *c. q. d.*

220 — Calcule pelo método das divisões sucessivas e por decomposição em factores primos o máximo divisor comum dos dois números 162 e 14. *Como* $162=2\times 3^4$ *e* $14=2\times 7$ *será* m. d. c. $=2$.