

DE

MATEMÁTICA

Redacção e Administração: Faculdade de Ciências—Rua da Escola Politécnica—Lisboa

EDITOR: JOSÉ DUARTE DA SILVA PAULO

Composto e impresso na Soc. Industrial de Tipografia, Limitada R. Almirante Pessanha, 3 e 5 - Lisboa

A B E L E G A L O I S

As vidas de Évariste Galois e Niels Abel oferecem um conjunto impressionante, o mais impressionante de toda a história da Ciência, de concordâncias e contrastes.

Uma multidão de coisas os aproxima: a época em que viveram — princípios do século XIX; a brevidade das suas vidas — Galois morreu com 21 anos incompletos em 1832, Abel com 27 incompletos em 1829; a sua espantosa precocidade — Galois estava de posse dos fundamentos da teoria da resolubilidade das equações algébricas por meio de radicais aos dezasseis anos, Abel aos vinte e quatro apresentou à Academia das Ciências de Paris uma memória sobre as Transcendentes Elíticas de que mais tarde Hermite havia de dizer que contém matéria para ocupar matemáticos durante quinhentos anos; o fim trágico que ambos tiveram — Galois morre estupidamente num duelo, Abel na miséria, minado pela tuberculose.

Une-os ainda a incompreensão e o desinteresse de que foram alvo por parte dos *consagrados* do seu tempo: os maiores, Cauchy em França e Gauss na Alemanha, deixaram passar a seu lado, sem os verem, os dois maiores génios matemáticos do século XIX — nódoa negra que a glória, a outros títulos bem merecida, jamais conseguirá apagar. Gauss não se dignou ler a memória que Abel lhe mandara sobre a impossibilidade da resolução da equação do 5.º grau por meio de radicais, afastando-a desdenhosamente com este comentário ao título — «mais uma monstruosidade!»; Cauchy, absorvido na sua obra, *perdeu* as que Abel em 1826, e Galois dois anos mais tarde, enviaram à Academia das Ciências. Para que a infelicidade da Academia fôsse completa, não faltaram na circunstância os episódios picarescos — Poisson escrevendo na capa duma memória de Galois, que não compreendera, um *visto* em boa caligrafia (o que é sempre uma solução...), Legendre desculpando-se, a respeito da memória de Abel, porque «era dificilmente legível, estava escrita numa tinta quasi branca»! ..

Outro traço de união consiste no facto de ambos se terem ocupado, independentemente um do outro, e sem se conhecerem, do mesmo assunto — a resolubilidade das equações algébricas, questão que forma a parte mais importante da obra *conhecida* de Galois e para o estudo da qual Abel contribuiu com o seu trabalho sobre a equação do 5.º grau, como acima se disse.

Acima de tudo, os dois estão irmanados numa coisa — a criminoso indiferença com que a Sociedade os tratou, condenando, como diz Tannery, um a morrer de fome, outro a viver ou a morrer, como se quisesse, no cárcere.

Mas, ao lado de tantos pontos de contacto, que diferença

enorme entre os dois, tão grande que se, pensando num, quisermos realizar a sua antítese, logo nos acode à mente o outro, tal a diversidade de condições psicológicas, de modos de trabalhar, de atitude perante a vida que ambos nos apresentam. O que num, Abel, é doçura, timidez, resignação, é no outro altivez, acção, revolta.

Ambos sofrem, mas na maneira de sofrer são dispares — Abel, fraco, de sensibilidade infantil, retrai-se, procura um ponto de apoio afectivo e, como todos os fracos, uma vez que entra na luta é para cometer uma injustiça!; Galois, personalidade incomparavelmente mais forte, revolta-se, ataca, ataca sempre. Abel, incapaz de ultrapassar os limites do *individual*, nunca aborda de alto a posição do *homem*, não relaciona os seus males com os males gerais de que enferma a sociedade do seu tempo, restringe a sua ambição à tranqüilidade dum lugar na Universidade; Galois, mais esclarecido, discerne as conexões íntimas do corpo social, vê nos defeitos orgânicos de base a razão profunda de que os casos individuais são o reflexo e, logicamente, combate as causas, atira-se para a luta, bate-se na rua, com tal ardor, tal exaltação no dom de si mesmo que chega a dizer «se fôr preciso um cadáver para que o povo se revoltasse, dar-lhe-ei o meu!»

Ao seu espírito superiormente claro nada passa despercebido e, pensando nas condições desastrosas da investigação científica, diz: «Aqui, como em todas as ciências, cada época tem de alguma maneira as suas questões do momento: há questões vivas que fixam ao mesmo tempo os espíritos mais esclarecidos... Parece muitas vezes que as mesmas idéias aparecem a vários como uma revelação. Se se procura a causa, é fácil encontrá-la nas obras daqueles que nos precederam, nas quais essas idéias estão presentes sem os seus autores darem por isso. A ciência não tirou, até hoje, grande partido desta coincidência tantas vezes observada nas investigações dos sábios. Uma concorrência desgraçada, uma rivalidade degradante têm sido os seus principais frutos. Não é, contudo, difícil reconhecer neste facto a prova de que os sábios não são, mais que os outros homens, feitos para o isolamento, que eles pertencem também à sua época e que, cedo ou tarde, multiplicarão as suas forças pela associação. Então, quanto tempo será poupado para a Ciência!» E noutro passo, escrito na prisão de Santa Pelágia em Outubro de 1831: «... infelizmente, não se pensa que o livro mais precioso do mais sábio seria aquêle em que ele dissesse tudo o que não sabe, não se pensa que um autor nunca prejudica tanto os seus leitores como quando dissimula uma dificuldade. Quando a concorrência, isto é, o egoísmo, deixarem de reinar nas ciências, quando uns se associarem com outros para estudar, em vez

A cada número $x = \frac{a + b\sqrt{m}}{c}$ corresponde um outro $x' = \frac{a - b\sqrt{m}}{c}$ que se chama o seu conjugado, e ambos são raízes da mesma equação (6) $x^2 - \frac{2a}{c}x + \frac{a^2 - b^2m}{c^2} = 0$. Representaremos por x' o conjugado de x .

É evidente que $a + b\sqrt{m}$ é um inteiro do corpo. Mas os inteiros do corpo ainda podem ter outra forma. Efectivamente se x for um inteiro, então, por verificar (6), terão que ser $\frac{2a}{c}$ e $\frac{a^2 - b^2m}{c^2}$ inteiros de R , e como podemos sempre supor que a , b e c não têm divisores comuns terá que ser $c = 2$ ou $c = 1$, donde as duas formas

$$x = \frac{a + b\sqrt{m}}{2} \text{ e } x = a + b\sqrt{m}.$$

Vejamos que depende do valor de m a forma dos inteiros.

Como m não contém factores quadrados será $m = 4k + 1$, $m = 4k + 2$ ou $m = 4k + 3$.

No primeiro caso $\frac{a^2 - b^2m}{4}$, termo independente de (6), será igual a $4k + \frac{a^2 - b^2}{4}$ e só será um inteiro se a e b forem simultaneamente pares ou ímpares; então

$$x = \frac{2a_1 + 2b_1\sqrt{m}}{2} = (a_1 - b_1) + 2b_1 \frac{1 + \sqrt{m}}{2}$$

ou

$$x = \frac{2a_1 + 1 + (2b_1 + 1)\sqrt{m}}{2} = (a_1 - b_1) + (2b_1 + 1) \frac{1 + \sqrt{m}}{2}.$$

No segundo caso, isto é, se $m = 4k + 2$, o número $\frac{a^2 - b^2m}{4} = \frac{4k + a^2 - 2b^2}{4}$ será inteiro simplesmente no caso em que a e b forem simultaneamente pares e então $x = A + B\sqrt{m}$. Caso análogo se passa quando $m = 4k + 3$.

Logo os inteiros de $R(\sqrt{m})$ são da forma

$$x = a_1 + b_1 \frac{1 + \sqrt{m}}{2} \text{ se } m = 4k + 1$$

ou $x = a + b\sqrt{m}$ se $m \neq 4k + 1$

e se fizermos $\omega = \frac{1 + \sqrt{m}}{2}$ ou $\omega = \sqrt{m}$, caso $m = 4k + 1$ ou $m \neq 4k + 1$, poderemos escrever

$$x = a_2 \cdot 1 + b_2 \omega$$

que é a fórmula geral dos inteiros de $R(\sqrt{m})$. Os números 1 e ω formam o que se chama uma base do corpo, e demonstra-se que é possível determinar outros inteiros do corpo ω_1 e ω_2 (e isto dum número infinito de maneiras) tais que todo o número do corpo se pode escrever sob a forma

$$\gamma = a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2$$

em que a_1 e a_2 são inteiros racionais bem determinados. É fácil ver agora que todas as propriedades dos inteiros racionais se mantêm.

(Continua no próximo número)

J. DA SILVA PAULO

O MÉTODO DE FUBINI PARA A INTEGRAÇÃO DAS FUNÇÕES RACIONAIS

Como é sabido, pode sempre determinar-se a primitiva de toda a função racional desde que seja possível resolver uma equação algébrica. O processo clássico consiste em reduzir a função dada à soma dum polinómio inteiro e duma fracção algébrica irredutível cujo numerador é de grau inferior ao denominador. Esta decompõe-se, em seguida, em fracções simples (correspondentes aos zeros do denominador da fracção dada, cuja determinação poderá ser impossível como acima se aludiu); e procede-se à integração destas, o que se faz sistematicamente. É-se conduzido assim, no caso geral, a uma combinação linear de logaritmos de funções lineares ou do 2º grau, arcos-tangentes de funções lineares, e de funções algébricas.

Tal observação levou o professor italiano Guido Fubini⁽¹⁾ à descoberta do seu engenhoso método que apresentaremos aos nossos leitores por ser de alguns desconhecido.

Consideremos a função racional $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ onde $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ designam dois polinómios inteiros de coeficientes reais sem factores comuns sendo o grau de $\varphi(x)$ inferior ao de $\psi(x)$. Suponhamos que sabemos determinar as raízes de $\psi(x) = 0$ e que conhecemos, portanto, o desenvolvimento único

$$\psi(x) = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta \dots (x^2 + px + q)^\lambda (x^2 + rx + s)^\mu \dots$$

com $p^2 - 4q < 0$, $r^2 - 4s < 0$, ...

A partir deste desenvolvimento a regra de Fubini permite imediatamente estabelecer o tipo da primitiva, à parte constantes a determinar:

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} dx = A \log(x - a) + B \log(x - b) + \dots + L_1 \log(x^2 + px + q) + M_1 \log(x^2 + rx + s) + \dots + L_2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + M_2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x + r}{\sqrt{4s - r^2}} + \dots + \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$$

onde é

$$\psi_1(x) = (x - a)^{\alpha-1} \cdot (x - b)^{\beta-1} \cdot \dots \cdot (x^2 + px + q)^{\lambda-1} (x^2 + rx + s)^{\mu-1} \dots$$

e $\varphi_1(x)$ um polinómio, de coeficientes a determinar, de grau inferior numa unidade ao de $\psi_1(x)$.

Prova-se facilmente⁽²⁾ que, derivando ambos os membros da expressão anterior e desembaraçando de denominadores [o menor denominador comum é $\psi(x)$] obtém-se, por identificação dos dois polinómios, um sistema de equações lineares que permite determinar as constantes. O processo indicado, como se acaba de ver dispensa a decomposição prévia de $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ em fracções simples e qualquer operação de integração.

Bastante engenhoso este método, rápido na indicação do tipo da primitiva, é sobretudo de aplicação útil quando a equação $\psi(x) = 0$ admite raízes complexas de grau de multiplicidade elevado.

M. ZALUAR NUNES

(1) Vide: G. Fubini, «Lezioni di Analisi Matematica», 5.ª ed., Torino, 1919, § 76.

(2) Vide: G. Vivanti, «Lezioni di Analisi Matematica», Torino, 1930, vol. I, pág. 412-414.