A cada número $\alpha = \frac{a+b\sqrt{m}}{c}$ corresponde um outro $\alpha' = \frac{a-b\sqrt{m}}{c}$ que se chama o seu conjugado, e ambos são raízes da mesma equação (6) $x^2 - \frac{2a}{c}x + \frac{a^2-b^2m}{c^2} = 0$. Representaremos por α' o conjugado de α.

É evidente que $a+b\sqrt{m}$ é um inteiro do corpo. Mas os inteiros do corpo ainda podem ter outra forma. Efectivamente se α fôr um inteiro, então, por verificar (6), terão que ser $\frac{2a}{c}$ e $\frac{a^2-b^2m}{c^2}$ inteiros de R, e como podemos sempre supor que a, b e c não têm divisores comuns terá que ser $c=2$ ou $c=1$, donde as duas formas

$$\alpha = \frac{a+b\sqrt{m}}{2} \quad \text{e} \quad \alpha = a+b\sqrt{m}.$$

Vejamos que depende do valor de m a forma dos inteiros.

Como m não contém factores quadrados será $m=\dot{4}+1$, $m=\dot{4}+2$ ou $m=\dot{4}+3$.

No primeiro caso $\frac{a^2-b^2m}{4}$, têrmo independente de (6), será igual a $\dot{4}+\frac{a^2-b^2}{4}$ e só será um inteiro se a e b forem simultâneamente pares ou ímpares; então

$$\alpha = \frac{2a_1+2b_1\sqrt{m}}{2} = (a_1-b_1)+2b_1\frac{1+\sqrt{m}}{2}$$

ou

$$\alpha = \frac{2a_1+1+(2b_1+1)\sqrt{m}}{2} = (a_1-b_1)+(2b_1+1)\frac{1+\sqrt{m}}{2}.$$

No segundo caso, isto é, se $m=\dot{4}+2$, o número $\frac{a^2-b^2m}{4} = \frac{\dot{4}+a^2-2b^2}{4}$ será inteiro simplesmente no caso em que a e b forem simultâneamente pares e então $\alpha = A+B\sqrt{m}$. Caso análogo se passa quando $m=\dot{4}+3$.

Logo os inteiros de $R(\sqrt{m})$ são da forma

$$\alpha = a_1+b_1\frac{1+\sqrt{m}}{2} \quad \text{se} \quad m=\dot{4}+1$$

ou

$$\alpha = a+b\sqrt{m} \quad \text{se} \quad m\neq\dot{4}+1$$

e se fizermos $\omega = \frac{1+\sqrt{m}}{2}$ ou $\omega=\sqrt{m}$, caso $m=\dot{4}+1$ ou $m\neq\dot{4}+1$, poderemos escrever

$$\alpha = a_2 . 1 + b_2\,\omega$$

que é a fórmula geral dos inteiros de $R(\sqrt{m})$. Os números 1 e ω formam o que se chama uma base do corpo, e demonstra-se que é possível determinar outros inteiros do corpo ω_1 e ω_2 (e isto dum número infinito de maneiras) tais que todo o número do corpo se pode escrever sob a forma

$$\gamma = a_1\,\omega_1 + a_2\,\omega_2$$

em que a_1 e a_2 são inteiros racionais bem determinados. É fácil ver agora que tôdas as propriedades dos inteiros racionais se mantêm.

(Continua no próximo número)

J. DA SILVA PAULO

O MÉTODO DE FUBINI PARA A INTEGRAÇÃO DAS FUNÇÕES RACIONAIS

Como é sabido, pode sempre determinar-se a primitiva de tôda a função racional desde que seja possível resolver uma equação algébrica. O processo clássico consiste em reduzir a função dada à soma dum polinómio inteiro e duma fracção algébrica irredutível cujo numerador é de grau inferior ao denominador. Esta decompõe-se, em seguida, em fracções simples (correspondentes aos zeros do denominador da fracção dada, cuja determinação poderá ser impossível como acima se aludiu); e procede-se à integração destas, o que se faz sistemàticamente. É-se conduzido assim, no caso geral, a uma combinação linear de logaritmos de funções lineares ou do 2º grau, arcos-tangentes de funções lineares, e de funções algébricas.

Tal observação levou o professor italiano Guido Fubini [1] à descoberta do seu engenhoso método que apresentaremos aos nossos leitores por ser de alguns desconhecido.

Consideremos a função racional $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ onde $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ designam dois polimónios inteiros de coeficientes reais sem factores comuns sendo o grau de $\varphi(x)$ inferior ao de $\psi(x)$. Suponhamos que sabemos determinar as raízes de $\psi(x)=0$ e que conhecemos, portanto, o desenvolvimento único

$$\psi(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\cdots(x^2+px+q)^{\lambda}(x^2+rx+s)^{\mu}\cdots$$

com $p^2-4q<0$, $r^2-4s<0$, ...

A partir dêste desenvolvimento a regra de Fubini permite imediatamente estabelecer o tipo da primitiva, à-parte constantes a determinar:

$$\int\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}dx = A\log(x-a)+B\log(x-b)+\cdots+$$
$$+L_1\log(x^2+px+q)+M_1\log(x^2+rx+s)+\cdots+$$
$$+L_2\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+M_2\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+r}{\sqrt{4s-r^2}}+\cdots+\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$$

onde é

$$\psi_1(x) = (x-a)^{\alpha-1}.(x-b)^{\beta-1}\cdots(x^2+px+1)^{\lambda-1}(x^2+rs+s)^{\mu-1}\cdots$$

e $\varphi_1(x)$ um polinómio, de coeficientes a determinar, de grau inferior numa unidade ao de $\psi_1(x)$.

Prova-se fàcilmente [2] que, derivando ambos os membros da expressão anterior e desembaraçando de denominadores [o menor denominador comum é $\psi(x)$] obtém-se, por identificação dos dois polinómios, um sistema de equações lineares que permite determinar as constantes. O processo indicado, como se acaba de ver dispensa a decomposição prévia de $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ em fracções simples e qualquer operação de integração.

Bastante engenhoso êste método, rápido na indicação do tipo da primitiva, é sobretudo de aplicação útil quando a equação $\psi(x)=0$ admite raízes complexas de grau de multiplicidade elevado.

M. ZALUAR NUNES

(1) Vide: *G. Fubini*, «Lezioni di Analisi Matematica», 3.ª ed., Torino, 1919, § 76.

(2) Vide: *G. Vivanti*, «Lezioni di Analisi Matematica», Torino, 1930, vol. I, pág. 412-414.