EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

ÉPOCA DE JULHO DE 1939

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

I

114 — *a)* Um professor tem, para distribuir como prémio, 25 livros por 3 alunos. Para atender ao seu saber e comportamento terá de dar ao melhor mais três que ao segundo e a êste mais dois que ao terceiro. ¿Quantos livros dará a cada aluno? R: *Se* x *representa o número de livros que o terceiro aluno receberá é* $x+(x+2)+(x+2+3)=25$, *donde* $x=6$. *O terceiro aluno receberá seis livros, o segundo oito e o primeiro onze.* *b)* O número de permutações de n objectos distintos é $p!$ vezes o número de combinações dos mesmos n objectos 3 a 3. ¿Quantos objectos são? R: *O problema traduz-se analìticamente por* $n!=p!\frac{n!}{3!(n-3)!}$. *Deve, pois, ter-se simultâneamente,* $n!\geq p!$, *isto é,* $n\geq p$ *e* $p!=(n-3)!6$. *Seja* $n=p+i$ *com* i *inteiro; é* $(n-i)!=(n-3)!6$ *e, portanto,* $i=0,1,2$. *Para* $i=0$, $n=p=3$; *para* $i=1$, $n=4$ *e* $p=3$; *para* $i=2$, $n=8$ *e* $p=6$. *c)* Na equação $2x^2-(2m+1)x+m^2-9m+39=0$ ¿que valor é preciso dar a m para que a equação tenha uma raiz dupla da outra? R: *Designemos por* α *e* 2α *as raizes da equação. Teremos*

$$3\alpha=\frac{2m+1}{2} \quad e \quad 2\alpha^2=\frac{m^2-9m+39}{2},$$

donde: $\left(\frac{2m+1}{6}\right)^2=\frac{m^2-9m+39}{4}$, *isto é,* $m^2-17m+70=0$

e, portanto, $m=\frac{17\pm\sqrt{17^2-4\times70}}{2}$; $m_1=10$, $m_2=7$.

115 — *a)* Calcular pelos logaritmos a área do trapézio de que se conhecem os dois lados paralelos, uma diagonal e o ângulo que ela forma com o maior dos dois lados conhecidos: $a=30^m$; $b=45^m$; $D=40^m$ e $\alpha=25^o\,35'\,43''$. R: *Designemos por* h *a altura e por* A *a área do trapézio. Tem-se* $h=D\,\text{sen}\,\alpha$ *e* $A=\frac{(a+b)D\,\text{sen}\,\alpha}{2}=75\times20\times\text{sen}\,25^o\,35'\,43''$ *metros quadrados. Ora* $\log A=\log 1500+\log\text{sen}\,25^o\,35'\,43''=3,1760913+\bar{1},6354952=2,8115865$ *donde* $A=648^{m^2},0171$. *b)* Demonstrar que $\text{cotg}\,3\alpha=\frac{\text{cotg}^3\alpha-3\,\text{cotg}\,\alpha}{3\,\text{cotg}^2\alpha-1}$. R: $\text{cotg}\,3\alpha=\frac{\cos(2\alpha+\alpha)}{\text{sen}(2\alpha+\alpha)}=$

$$=\frac{\cos2\alpha.\cos\alpha-\text{sen}\,2\alpha\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,2\alpha\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha\cos2\alpha}=\frac{(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha)\cos\alpha-2\,\text{sen}^2\alpha\cos\alpha}{2\,\text{sen}\,\alpha\cos^2\alpha+\text{sen}\,\alpha(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha)}=$$

$$=\frac{\cos^3\alpha-3\,\text{sen}^2\cos\alpha}{3\,\text{sen}\,\alpha\cos^2\alpha-\text{sen}^3\alpha}=\frac{\text{cotg}^3\alpha-3\,\text{cotg}\,\alpha}{3\,\text{cotg}^2\alpha-1}.$$

116 — Determinar pelo método dos lugares geométricos os pontos duma circunferência dada dos quais se pode ver um segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo dado. Discutir as soluções propostas. R: *Os pontos procurados são, quando existirem, obtidos pela intersecção da circunferência dada com qualquer dos dois segmentos capazes do ângulo dado. A discussão far-se-á por exame das posições relativas do segmento e da circunferência e comparação das grandezas do raio desta, do comprimento de* $\overline{AB}$ *e do ângulo.*

117 — A soma de dois números é 960. O cociente do menor múltiplo comum pelo máximo divisor comum é 63. ¿Quais são os números? R: *Sejam* a *e* b *os dois números, e* d *o seu máximo divisor comum. É* $a=d\times p$ *e* $b=d\times q$, *com* p *e* q *primos entre si. O menor múltiplo comum é* $\frac{ab}{d}$, *e as condições do problema exprimem-se pelas igualdades* $\frac{ab}{d^2}=pq=63$ *e* $d(p+q)=960$. *Como* $63=3^2\times7$, *o número de divisores de* 63 *é* 6. *Os pares de divisores que nos interessam, são, só, dois* (1, 63) *e* (7, 9), *visto que o terceiro* (3, 21) *é constituido por números que não são, entre si, primos.* d *obter-se-á dividindo* 960 *por* $64=1+63$, *num caso, e por* $16=7+9$, *no outro. E os números são, ou* 540 *e* 420, *ou* 15 *e* 945.

II

118 — *a)* ¿Qual é o número com 3 algarismos cujo primeiro algarismo é duas vezes o segundo mais 2 e o segundo é o terceiro deminuído de 3, sabendo que a soma dos três algarismos é 9? *b)* ¿Qual é o valor da razão entre os coeficientes dos terceiros termos dos desenvolvimentos dos binómios $(1+a)^6$ e $(1-a)^6$ e o valor da sua soma? *c)* Procurar os valores de x que satisfazem à desigualdade

$$\frac{x}{x-a}-\frac{2a}{x+a}>\frac{8a^2}{x^2-a^2}.$$

119 - *a)* Calcular pelos logaritmos a área do paralelogramo definido pelos dois lados e o ângulo agudo, respectivamente: $a=7^m,30$, $b=12^m,25$ e $\alpha=61^o27'33''$. *b)* Demonstrar que $4\,\text{sen}^3\alpha=-\text{sen}\,3\alpha+3\,\text{sen}\,\alpha$.

120 — Traçar por método geométrico um triângulo inscrito numa circunferência dada, semelhante a um triângulo dado.

121 — Mostrar que dois números divididos pela sua diferença dão restos iguais.

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geógrafo

I

122 — *a)* Determine os valores de x que tornam negativa a fracção $\frac{x^2-2x+5}{x^2-5x+6}$. R: $2<x<3$. *b)* ¿Que valor deve ter a para que o valor de x deduzido da equação $(a^2-1)x=a+1$ seja indeterminado? R: $a=-1$. *c)* Supondo que na equação $ax+by=c$, a, b e c são primos entre si, indique: 1.º ¿Qual é a condição para que a equação admita soluções inteiras? 2.º ¿Quais são as condições para que a equação admita uma infinidade de soluções inteiras e positivas?

123 — *a)* Dados os catetos $b=829^m,7$ e $c=655^m,6$ dum triângulo rectângulo, calcule, por logaritmos, o valor do ângulo B que se opõe ao lado b. *b)* Calcule, sem recorrer às tábuas, os valores de $x=\text{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ e $y=\text{sen}\,900^o$.

R: $x = -\sqrt{3}$, $y = 0$. *c)* Deduza das igualdades:

$\cot g\, a = \dfrac{\cos a}{\operatorname{sen} a}$ e $\operatorname{cosec} a = \dfrac{1}{\operatorname{sen} a}$ a igualdade:

$$\operatorname{cosec}^2 a - \cot^2 a = 1.$$

124 — *a)* Demonstre que unindo 2 a 2 os meios dos lados consecutivos dum quadrilátero qualquer se obtém um paralelogramo. *b)* ¿Como determina os restos que se obtêm na divisão dum número por 100, por 3 e por 4? Aplique os teoremas enunciados ao cálculo dos restos das divisões de 432965432 pelos números referidos.

II

125 — *a)* Desenvolva $\left(2\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ e simplifique os termos do desenvolvimento. *b)* Enuncie os teoremas que permitem determinar o sinal do trinómio do 2.º grau ax^2+ $+bx+c$ para os diferentes valores de x. *c)* Resolva a equação $x^4-8x^2+16=0$.

126 — *a)* Dados a hipotenusa $a=839^m{,}2$ e o ângulo $B=40°\,27'\,32''$ (que se opõe ao cateto b) dum triângulo rectângulo, calcule por logaritmos o comprimento do outro cateto c. *b)* Calcule, sem recorrer às tábuas de logaritmos, os valores de $x=\operatorname{sen} 405°$, $y=\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$. *c)* Represente gràficamente a função $y=\cos 2x$, dando a x os valores $x=0°$, $45°$, $90°$, $135°$ e $180°$.

127 — *a)* Demonstre que a mediana dum triângulo rectângulo que divide ao meio a hipotenusa tem por comprimento metade do comprimento da hipotenusa. *b)* Considere os três números inteiros e consecutivos n, $n+1$ e $n+2$. ¿Quantos podem ser divisíveis por dois? ¿Poderá acontecer que nenhum seja divisível por 3? ¿Se n fôr par haverá entre os três números algum que seja divisível por 4? ¿Qual dêles será? Justifique as respostas.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras

128 — *a)* Defina potência de expoente inteiro e positivo; diga que generalizações conhece da definição de potência e quais os motivos que levaram a dar essas definições. *b)* Simplifique e reduza a radicais a função $z=\dfrac{(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right).\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}$.

Classifique a função z obtida e a função $u=z^3$.

R: $z=\sqrt[3]{\dfrac{x+y}{(x-y)^2}}$; *z é função irracional das duas variáveis* x *e* y; *u é função racional de* x *e* y.

129 — *a)* Defina as funções inversas de seno, coseno e tangente e escreva a expressão geral dos arcos cuja tangente é -1. R: $\operatorname{arc.tg}(-1)=k\pi-\dfrac{\pi}{4}$ rad. *b)* Determine os ângulos internos dum trapézio isósceles conhecendo a sua altura e a diferença das bases. R: $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2h}{d}$ (h *altura e* d *diferença das bases*), $\beta=\pi-\alpha$.

130 *a)* Defina ângulo poliedro e poliedro regular. ¿Quantos poliedros regulares convexos existem iguais? Dêsses poliedros há algum que seja uma pirâmide? e um prisma? ¿Qual é a razão pela qual não existe nenhum poliedro regular convexo cujas faces tenham mais de cinco lados? *b)* Dada uma circunferência (C) e um ponto interior M não coincidente com o centro, determine o lugar geométrico dos meios das cordas que passam por M. ¿E se o ponto M estiver sôbre a circunferência? R: *O logar geométrico é a circunferência de diâmetro* CM (C *designa o centro de* (C)).

131 — Faz-se girar um triângulo rectângulo em tôrno da sua hipotenusa; seja V o volume do sólido gerado. Faz-se em seguida girar em tôrno de cada um dos seus catetos; sejam v e v' os volumes dos sólidos obtidos; verificar que

$$\frac{1}{V^2}=\frac{1}{v^2}+\frac{1}{v'^2}.$$

R: *Sejam* a *a hipotenusa,* b *e* c *os catetos, e* V *o volume do sólido gerado pela rotação do triângulo em tôrno do cateto* c. *Tem-se* $V=\dfrac{1}{3}\pi a\left(\dfrac{bc}{a}\right)^2$, $v=\dfrac{1}{3}\pi bc^2$, $v'=\dfrac{1}{3}\pi cb^2$. *Por substituïção na expressão* $\dfrac{1}{V^2}=\dfrac{1}{v^2}+\dfrac{1}{v'^2}$, *notando que é* $a^2=b^2+c^2$, *esta verifica-se.*

132 — Calcular as arestas dum paralelipípedo rectângulo sabendo que as suas medidas estão em progressão aritmética e conhecendo, além disso, a área total e a diagonal do paralelípipedo. R: *Sejam* $x-r$, x *e* $x+r$ *as medidas das arestas do paralelipipedo. As equações do problema são:*

$$\begin{cases} d^2=(x-r)^2+x^2+(x+r)^2 \\ A=2x(x-r)+2x(x+r)+2(x-r)(x+r) \end{cases}$$

Resolvendo êste sistema e atendendo a que é $x>0$, *acham-se as soluções* $x=\dfrac{\sqrt{d^2+A}}{3}$ *e* $r=\pm\sqrt{\dfrac{2d^2-A}{6}}$. *Para que o paralelipipedo exista é necessário e suficiente que* $A\le 2d^2$. *Se* $A=2d^2$ *trata-se dum cubo. Note-se que os dois valores de* r *conduzem ao mesmo paralelipipedo.*

ÁLGEBRA SUPERIOR E MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. (2.º exame de freqüência 1938-39)

I

133 — *a)* Defina eliminante e resultante dum sistema de equações algébricas. *b)* Defina coordenadas cilíndricas e deduza as expressões que as relacionam com as coordenadas dum sistema cartesiano ortogonal no caso em que coincidem os elementos de referência comuns aos dois sistemas. *c)* Indique quais os lugares geométricos que, em geometria analítica no espaço, são definidos por cada uma das equações $4x-y=0$; $2x^2+2y^2-y+x=0$. *d)* Escreva na forma reduzida e na forma normal a equação duma recta no plano e indique o significado geométrico das constantes que entram nessas equações, no caso dos eixos cartesianos serem oblíquos. *e)* Defina potência dum ponto em relação a uma circunferência e indique como procede à sua determinação no caso das coordenadas cartesianas ortogonais.

134 — Resolva a equação:

$$10x^6-27x^5-120x^4+120x^2+27x-10=0.$$

R: $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=5,\ x_4=\frac{1}{5},\ x_5=-2,\ x_6=-\frac{1}{2}$.

135 — Deduza a equação da circunferência com centro no eixo dos YY e tangente à recta $y-3x+5=0$ no ponto $P(2,1)$. R: $3(x^2+y^2)-10y-5=0$.

136 — Determine a distância do ponto P ao plano π: P é o traço da recta $x-2=\frac{y}{-6}=\frac{z-2}{3}$ no plano bissector do diedro $X\widehat{O}YZ$; π é um dos planos que passam pelo eixo OZ e fazem um ângulo de 60° com o eixo OY. R: *Há dois planos que passam por* OZ *e determinam com o semi-eixo* OY *um ângulo de* 60°. *As distâncias de* P *a êsses planos são iguais a* $\sqrt{3}$.

Outros exercícios

137 — Resolva, pelo método dos divisores, a equação

$$2x^5-3x^4-14x^3+38x^2-8x-15=0.$$

R: $x_1=1,\ x_2=-3,\ x_3=-\frac{1}{2},\ x_4=2+i,\ x_5=2-i$.

138 — Deduza a equação da circunferência que passa pelo ponto $P(0,1)$ e forma com a circunferência $x^2+y^2-4x+9y+3=0$ um sistema que tem por eixo radical a recta $x-2y-1=0$. R: $3(x^2+y^2)+x+y-4=0$.

139 — Deduza a equação do plano que passa por r_1 e é paralelo a r_2; r_1 passa por $P_1(1,-1,2)$ e é perpendicular ao plano bissector do diedro $X\widehat{OZ}Y$; r_2 passa por $P_2(2,-1,3)$ e $P_3(1,0,1)$. R: $x+y=0$.

140 — Determine os limites das raízes da equação $2x^5-3x^4+x^2-5x-8=0$ usando os métodos de Bret e Newton.

141 — Deduza a equação duma recta que passe pelo centro da circunferência $x^2+y^2-3x+6y+7=0$ e faça um ângulo de 45° com a tangente a esta circunferência no ponto $P(2,-1)$. R: $10y-6x+39=0$ *e* $6y+10x+3=0$.

142 — Determine a distância entre as rectas r_1 e r_2: r_1 passa por $P_1(1,-1,2)$ e é paralela aos planos $2x-5y+z-3=0$ e $x-2y-3z+1=0$; r_2 passa pelo centro da esfera $x^2+y^2+z^2+4y-16=0$ e pelo ponto $P(6,2,2)$.

R: $\delta=\frac{17}{\sqrt{390}}$.

143 — Determine λ de forma que o sistema $x-3y+2z+t=0$, $2x+y-2z-2t=0$, $-x+y+3z+2t=0$ e $x+y+z+\lambda t=0$ admita soluções não nulas. R: $\lambda=\frac{2}{23}$.

144 — Deduza a equação da bissectriz do ângulo formado pelas rectas r_1 e r_2: r_1 passa pelo centro da circunferência $x^2+y^2-4x-6y-13=0$ e pelo ponto $P(3,-2)$; r_2 é a mediana relativa ao vértice $A(2,1)$ do triângulo cujos outros vértices são $B(3,-2)$ e $C(-1,2)$.

R: $(5\mp\sqrt{13})x+(1\pm\sqrt{13})y-(13\mp\sqrt{13})=0$.

145 — Deduza a equação da esfera cujo centro é o ponto de encontro das rectas r_1 e r_2 e que é cortada pelo plano dos XZ segundo uma circunferência de raio $R=5$

$$r_1\equiv\begin{cases}x=3z-5\\ y=2z+4\end{cases}\qquad r_2\equiv\begin{cases}x=z-7\\ y=-3z-1\end{cases}.$$

R: $x^2+y^2+z^2+16x-4y+2z+40=0$.

I. S. C. E. F. (3.º exame de freq., 20-6-1939)

146 — Calcular três termos do desenvolvimento, em série de potências da função $y=\frac{1+x^2+x^4}{\cosh x}$.

R: $y=1+\frac{x^2}{2}+\frac{17}{24}x^4+\cdots$

147 — Dada a equação $x^3-4x^2+6x+\lambda=0$ determine λ de modo que uma das raízes seja igual ao produto das outras duas. Resolva, nessa hipotese, a equação. R: *Há dois valores de* λ: $\lambda=-9$ *a que correspondem as raizes* $\frac{1+i\sqrt{11}}{2}$, $\frac{1-i\sqrt{11}}{2}$ *e* 3, *e* $\lambda=-4$, a que correspondem as raízes $1+i$, $1-i$, e 2.

148 — É dada em eixos coordenados rectangulares a recta $r)\ \frac{x}{-2}+y=1$; conduzir pelo ponto $(0,2)$ uma recta r' tal que o triângulo formado pelas rectas r', r' e pelo eixo das abscissas tenha uma área dada m. Discussão. Examinar, em particular, os casos $m=1$ e $m=2$. R: *A equação de* r' *é* $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{2}=1$, *onde* α *é uma das raizes de* $\alpha^2+(4-m)\alpha+4(1-m)=0$, *que traduz ser* m *a área do triângulo em questão. O problema é sempre possivel* $(m>0)$ *com duas soluções distintas (excepto no caso* $m=0$, *que não interessa). Uma das soluções para* $m=1$ *é o eixo das ordenadas. Para* $m=2$ *as rectas soluções correspondem aos valores* $\alpha=-1\pm\sqrt{5}$.

3.º exame de freq. extraordinário, 28-6-1939

149 — Duma função $y(x)$ conhecem-se os seguintes valores:

$x)$	-2	-1	0	1	2
$y)$	21	3	1	3	21

Calcular a função interpoladora $P(x)$ e fazer a sua representação geométrica.

150 — Dadas as rectas $r)\ x-y+2=0$ e $r')\ x+y-4=0$ tirar pelo seu ponto de encontro uma recta tal que o quadrilátero determinado pelos dois eixos coordenados e pelas rectas r e r' fique por ela dividido em duas figuras de área igual.

151 — Resolver a equação

$$2x^4+3x^3+2x^2-11x-21=0.$$

I. S. T. (Mat. Gerais — 2.º Exame de freq., 1938-39)

I

152 — *a)* Demonstrar que o determinante

$$\begin{vmatrix} x^n & a & ax & \cdots & ax^{n-2} & ax^{n-1}\\ x^{n-1} & 1 & a & \cdots & ax^{n-3} & ax^{n-2}\\ x^{n-2} & 0 & 1 & \cdots & ax^{n-4} & ax^{n-3}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x & 0 & 0 & \cdots & 1 & a\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

é igual a $(x-a)^n$.

R: *Representemos por* D_n *o determinante dado. Para* $n=1$ *é, evidentemente,* $D_1=x-a$.

Adoptemos na demonstração proposta o método de indução *completa, admitindo assim a hipótese de que é* $D_{n-1}=(x-a)^{n-1}$. *Desenvolvendo* D_n *segundo os elementos da segunda coluna, tem-se:* $D_n=-a\,D_{n-1}+x\,D_{n-1}=(x-a)\,D_{n-1}=(x-a)^n$, c. q. p.

153 — Dada, no plano $x0y$, a cónica $xy+2x-5y=0$ estudá-la, fazendo o seu traçado aproximado, e achando as suas equações referidas aos eixos e às assíntotas. R: *A cónica é uma hipérbole equilátera. A equação referida aos eixos é* $\frac{X^2}{20}-\frac{Y^2}{20}=1$ *e a equação referida às assíntotas é* $XY=-10$.

154 — Determinar a recta simétrica da recta $x-2=y=z$ em relação ao plano $3x+y-z=5$.
R: $\frac{3x-5}{-7}=\frac{3y+1}{5}=\frac{3z+1}{17}$.

Outros exercicios

155 — Discutir e resolver o sistema

$$\begin{cases}(a+b)\,x+(a-b)\,y=a^2+b^2\\(a-b)\,x+(a+b)\,y=a^2-b^2.\end{cases}$$

Interpretar em geometria analítica no espaço.

156 — Dadas no plano $x0y$, as duas rectas $mx+(2m-1)y+3=0$ e $(4m-7)x-(m+2)y-8=0$ determinar m de modo que sejam 1.º) perpendiculares, 2.º) paralelas. Determinar no 1.º caso o ponto de encontro, no 2.º caso a sua distância.

157 — Verificar que os planos perpendiculares aos meios dos lados dum quadrilátero $ABCD$ são concorrentes num ponto. ¿Qual é a posição dêsse ponto se o quadrilátero é plano?

158 — Um triângulo variável tem vértices fixos nos pontos $A(2,0)$ e $B(0,4)$ deslocando-se o terceiro vértice C na recta $x+y=9$. Achar o lugar geométrico do baricentro do triângulo.

159 — Determinar a condição a que deve satisfazer λ para que a circunferência representada pelas equações $x^2+y^2+z^2=R^2$ e $x+y+z=\lambda$ seja real. Determinar, nesta hipótese, o centro e o raio dessa circunferência.

ANÁLISE INFINITESIMAL

F. C. L. (Junho de 1939)

160 — *a)* Linhas contínuas e rectificáveis: Definição e suas propriedades. *b)* Envolvente duma família de superfícies: Definição, equação e propriedades; características e aresta de reversão. *c)* Superfícies regradas: Sua equação vectorial; definição e equação vectorial da linha de estricção das superfícies enviezadas. *d)* Contacto de duas curvas torsas: Definição e condições analíticas do contacto de ordem n. *e)* Integrais definidos: Definição e propriedades gerais.

161 — Determine os máximos e mínimos da função

$$z=x^3+3x^2+4xy+y^2.$$

R: *A* $x=\frac{2}{3}$, $y=-\frac{4}{3}$ *corresponde um minimo* $z=-\frac{4}{27}$.

162 — Determine as assíntotas da curva

$$x^2(x-y)^2-a^2(x^2+y^2)=0.$$

R: $X=a$, $X=-a$, $Y=X+a\sqrt{2}$, *e* $Y=X-a\sqrt{2}$.

163 — Calcule

$$\int\frac{1-\operatorname{sen}x}{\cos x+\operatorname{sen}x}\,dx.$$

Outros exercicios

164 — Dada a equação

$$\frac{1-x^2}{x^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{x^3}\cdot\frac{dy}{dx}+y=0$$

substitua a variável independente x por outra t ligada com esta pela relação $x=\sqrt{1-t^2}$.

165 — Determine os pontos de inflexão da curva

$$y=\frac{x^3}{x^2+3a^2}$$

e as tangentes nesses pontos.

166 — Calcule

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^3+1}}.$$

I. S. C. E. F. (2.º exame de freq., 21-4-1939)

167 — Calcular o integral $\iint_A\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$ sendo A a área limitada pelos eixos coordenados e pela elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ no quadrante positivo dos eixos. R: *Seja* I *o integral dado. A função integranda é infinita sôbre parte do contôrno de* A. *É fácil porém provar a convergência de* I.

Façamos $\begin{cases}x=aX\\y=bY\end{cases}$. A *transforma-se em* A′, *dominio limitado pelos eixos coordenados e por* $X^2+Y^2=1$. *Atendendo a que é* $\frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)}=ab$, *vem* $I=\iint_{A'}\frac{ab\,dX\,dY}{\sqrt{1-X^2-Y^2}}=\iint_{A'}\frac{ab\rho\,d\rho\,d\theta}{\sqrt{1-\rho^2}}$, *introduzindo coordenadas polares. É pois*

$$I=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

integral êste, evidentemente convergente. Efectuando o cálculo obtem-se $I=\frac{1}{2}\pi ab$.

168 — Determine os pontos de inflexão da curva

$$xy=2a\sqrt{2ax-x^2}.$$

169 — O integral

$$\int_1^\infty\left[x(1+x^2)^{-\frac{1}{6}}\right]^{-3}dx$$ será convergente?

I. S. T. (2.º exame de freqüência 1938-39)

I

170 — Calcular o integral duplo $\iint\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ estendido ao interior da parábola $y^2=2px$.

171 — Integrar a equação

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=0.$$

172 — Determinar os pontos singulares da curva

$$y^2-2x^2y+x^4-x^5=0.$$

173 — Integrar a equação $y''-y'=(x^2-1)e^x$.

II

174 — Sendo ρ o raio de curvatura num ponto P qualquer, e $n=\overline{PA}$ o segmento de normal compreendido entre o ponto P e o eixo dos xx, determinar, entre as curvas planas integrais de equação $\rho=2n$, aquela que tem ordenada mínima no ponto $\left(1,\frac{1}{2}\right)$. (Eixos rectangulares).

175 — Integrar a equação

$$2t^2\frac{d^2y}{dt^2}-2t\frac{dy}{dt}-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+4t^2=0$$

efectuando a transformação $x=t^2$.

176 — Calcular o volume do sólido comum aos dois parabolóides $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{36}=2z$, $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}=2(2-z)$.

177 — Determinar a de modo tal que a superficie $z=x^2+y^2+axy$ seja planificavel. Escrever a equação do plano tangente na origem dos eixos coordenados.

ANÁLISE SUPERIOR

F. C. C. (exame de freq., Junho de 1939)

178 — Provar que a equação $x^2y''+4xy'+2y=X$ admite um integral regular na origem $x=0$ desde que X seja também regular neste ponto.

179 — Provar (sem recorrer ao teorema análogo de Lebesgue) que tôda a função integrável R satisfaz à condição

$$\lim_{h=0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\,dx=0.$$

F. C. L. (2.º exame de freq. em 1939)

180 — *a)* Equações diferenciais totais a três variáveis: $Pdx+Qdy+Rdz=0$. Definição da sua integração e condição para que uma equação dêste tipo seja diferencial total. *b)* Equações não lineares às derivadas parciais de primeira ordem: generalidades; definição de integral completo. *c)* Equações às derivadas parciais de segunda ordem: definição de integral intermédio. *d)* Equação diferencial linear de ordem n: equações adjuntas e auto-adjuntas. Têrmo geral da equação auto-adjunta de segunda ordem. *e)* Definição e classificação das equações integrais. Transformação da equação de Volterra da primeira espécie numa da segunda espécie, quando o núcleo se não anula para valores iguais das variáveis.

181 — Aplicar o teorema dos resíduos ao cálculo do integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+2)^2(x^2-x+1)}$.

182 — Determinar o integral geral da equação $4x^3-y-xy^2+xy'=0$ de que é integral particular $y=-2x$.

183 — Determinar o sistema de integrais gerais do sistema

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+y-3z=\operatorname{sen}2x\\[2mm] \dfrac{dz}{dx}-3y+z=0\end{cases}$$

Outros exercicios

184 — Calcular $\displaystyle\int_{2-i}^{2+i}\frac{dz}{\sqrt{(z-2)^2+1}\,(z^2+1)(z-1)^2}$.

185 — Determinar o integral geral da equação

$$xy\,y''-xy'^2-2y\,y'+xy^2=0.$$

186 — Determinar o integral geral da equação

$$y(z-y)\,dx+xz(x+1)\,dy-xy(x+1)\,dz=0.$$

GEOMETRIA SUPERIOR

F. C. C. (exame de freq., Junho de 1939)

187 — Supondo $a'_{ik}=\lambda a_{ik}$, com λ constante, exprimir a curvatura de $f'=a'_{ik}\,dx_i\,dx_k$ em função da curvatura de $f=a_{ik}\,dx_i\,dx_k$.

188 — Seja V_2 a variedade linear bidimensional construída sôbre as direcções concorrentes ξ e η, e seja ζ uma direcção arbitrária de V_2. Provar que a relação $\operatorname{sen}(\zeta\xi)=\cos(\zeta\eta)$ implica $\cos(\xi\eta)=0$.

F. C. L. (exame de freq. em 1939)

189 — *a)* Invariantes e parâmetros diferenciais. Covariantes. Primeiro parâmetro diferencial e parâmetro diferencial mixto. *b)* Equivalência de duas formas diferenciais quadráticas. Definição. Condições de integrabilidade do sistema de equações de Christoffel. *c)* Métrica angular sôbre uma superfície. Involução circular de elementos lineares. *d)* Sistemas de coordenadas curvilíneas isotérmicas; parâmetros isométricos.

190 — Determinar o parâmetro λ de modo que a forma $f=2xt+\lambda yz+x^2+y^2-2zt$ seja degenerada; para o valor positivo de λ formar uma sua cadeia de menores principais e concluir a partir dela quais os números característicos da forma.

191 — Dada a forma $\varphi=x^2\,dxdy-dz^2-xydxdz+zdx^2-ydydz$ calcular o símbolo $\left\{\begin{matrix}1\ 2\\3\end{matrix}\right\}$.

Outros exercicios

192 — Determinar os parâmetros m,n,p de modo que a substituïção $\begin{cases}X=mx+ny\\ Y=px+\frac{1}{2}y\end{cases}$ seja ortogonal. Indicar o número de soluções do problema e fazer a associação dos valores correspondentes.

193 — Transformar a forma $f=y^2\,dx^2+ydxdy-dy^2$ mediante a substituïção $x=X+Y$, $y=e^{X-Y}$ e verificar a relação entre as funções A_{ik} e A'_{rs} para os valores $i=k=1$.

COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA E DE GEOMETRIA ANALÍTICA

F. C. C. (exame de freq., Junho de 1939)

194 — Achar a composição de

$$f(z) = (z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_n)$$

e do seu grupo G de Galois na hipótese de existir uma função circulante para $r_1, r_2, \cdots r_n$.

195 — Tendo-se $\psi(\beta) = 0$ e $\beta = \chi(\alpha)$ com ψ e χ no corpo C, tôda a equação que α verifique neste corpo é de grau pelo menos igual ao grau de ψ. (Supõe-se ψ irredutível).

F. C. L. (exame de freq., Junho de 1939)

196 — Defina: 1) Substituïção linear ortogonal e enuncie as principais propriedades das substituïções dêste tipo. 2) Polos duma substituïção linear. 3) Matriz de Hermite. Propriedades. 4) Covariante e invariante duma forma algébrica. Exemplos. 5) Índice dum sub-grupo num grupo dado de substituïções. 6) Isomorfismo holoédrico e meriédrico entre dois grupos de substituïções.

197 — Mostre que o conjunto das quatro matrizes

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

forma um grupo, adoptando como lei de composição o produto de matrizes.

198 — Determine a equação da hipérbole que tem por assíntotas as rectas de equações $y - x - 1 = 0$ e $x = 0$ e passa pelo ponto $P(-2,0)$.

Outros exercícios

199 — Determine a equação da hipérbole equilátera que passa pela origem, tem por assíntota a recta $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$ e por centro o ponto de abscissa 1. Determine em seguida, por aplicação dos invariantes, a equação da curva referida às assíntotas.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. L. (2.º exame de freqüência em 2-6-1939)

200 — *a)* Conceito de probabilidade elementar e sua importância nos problemas de probabilidades contínuas. Princípio da invariância por deslocamento. *b)* Enuncie o problema das probabilidades das causas. Teorema de Bayes.

201 — *c)* Enuncie o problema da compensação de observações indirectas de precisão diferente e indique a forma de o resolver. *d)* Enuncie os postulados de Gauss.

202 — Os 3 ângulos dum triângulo plano A B C foram medidos, obtendo-se os seguintes resultados: $\hat{A} = 62^o\,27'\,32''$ (pêso 2); $\hat{B} = 56^o 16' 52''$ (pêso 1); $\hat{C} = 61^o 15' 44''$ (pêso 2). Calcule, pelo método geral de compensação das observações condicionadas, os valores compensados dos ângulos.
R: $\hat{A} = 62^o\,27'\,30''$, $\hat{B} = 56^o\,16'\,48''$, $\hat{C} = 61^o\,15'\,42''$.

Outro exercício

203 — Com 3 baralhos completos de 52 cartas formam-se 3 grupos de cartas nas seguintes condições:

1.º) Com 40 cartas (tirando dum baralho completo os *8,8,9,9* e *10,10*).
2.º) Com as figuras dum baralho (ás, dama, valete e rei).
3.º) Um baralho completo de 52 cartas.

Escolhendo ao acaso um dêstes grupos tira-se uma carta, que depois se reconheceu ser o rei de espadas.

¿Qual é a probabilidade da carta pertencer ao 1.º grupo? E se a carta aparecida fôsse o *10* de espadas ¿qual será a probabilidade de pertencer ao 1.º grupo?

MECÂNICA RACIONAL

F. C. L. (2.º Exame de freqüência em 4-5-1939)

204 — *Cinemática: a)* O que entende por movimento de roto-translação; defina decomposição própria e imprópria. *b)* Enuncie o teorema de Coriolis e escreva a sua expressão definindo as diferentes acelerações. *c)* Defina os ângulos de Euler. *d)* Enuncie o teorema de Chasles (movimento de uma figura plana no seu plano).

205 — *Estática e Dinâmica: a)* Defina fôrças motoras e resistentes. *b)* Enuncie os teoremas gerais sôbre o equilíbrio. *c)* Enuncie as condições gráficas necessárias para o equilíbrio dos polígonos funiculares. *d)* Escreva as equações de Euler relativas ao movimento do ponto material livre (equações intrínsecas).

206 — *Problemas: a)* Determine as coordenadas do centro de gravidade do sólido gerado pela área plana compreendida entre o eixo OY, a recta $y = p$ e a parábola $y^2 = 2px$, quando ela roda de 360^o em tôrno de OY. R: $\xi = 0$ $\eta = \frac{5}{6} p$ $\zeta = 0$.
b) Um ponto material de pêso mg é obrigado a permanecer sôbre uma circunferência situada num plano vertical. Determinar a fôrça que deve atraír o ponto para a extremidade superior do diâmetro vertical, a-fim-de que êle esteja em equilíbrio num dos extremos do diâmetro horizontal. R: $F = \sqrt{2}\ mg$.

ASTRONOMIA

F. C. L. (2.º Exame de freqüência em 8-5-1939)

207 — *a)* Defina directriz e linha média de um nível. Diga o que entende por nível calado e por nível rectificado. *b)* Defina colimação de um instrumento de passagens colocado no meridiano. Que métodos conhece para a determinação de colimação? *c)* Quais as estrêlas mais convenientes para a determinação de azimute de um I. P. colocado no meridiano; justifique a resposta. *d)* Como se reduzem as observações feitas nos diferentes fios do retículo, de um I. P. colocado no meridiano, ao fio do meio? *e)* O que é paralaxe de um astro? Que espécies de paralaxe conhece? *f)* Indique as principais diferenças entre os métodos de Gago Coutinho e de Talcott (determinação de latitude).

208 — *a)* Observaram-se duas estrêlas na sua passagem meridiana e determinaram-se os tempos $\theta_1 = 15^h\,20^m\,24^s,80$ e $\theta_2 = 15^h\,30^m\,10^s,04$ das suas passagens na média dos fios. Pretende conhecer-se o azimute do I. P., supondo-se constante o êrro de nível e nulo o de colimação. A latitude do lugar de observação é $\varphi = 38^o\,43'\,0''$, e as coordenadas das estrêlas são

$$\begin{cases} \alpha_1 = 15^h\,18^m\,12^s,40 \\ \delta_1 = -5^o\,20'\,12'',00 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \alpha_2 = 15^h\,27^m\,54^s,40 \\ \delta_2 = 55^o\,10'\,25'',00 \end{cases}$$

R: $\alpha = 2^s,71$.

b) Supondo que $\theta_1 = 15^h\,20^m\,14^s,80$ é o tempo sideral de Lisboa, determinar a hora legal nesse instante. A longitude de Lisboa é $\lambda = +0^h\,36^m\,44^s,68$ R: $H_L = 0^h\,57^m\,8^s,27$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

209 — Mostrar que a primitiva de $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2(x-d)^2}$ se reduz a uma função racional quando se verifica a relação harmónica $2(ab+cd)=(a+b)(c+d)$.

210 — Determinar um conjunto ordenado de cinco algarismos e uma base de numeração tais que o número representado por êsse conjunto nessa base seja duplo do número representado pelo mesmo conjunto na base dez.

211 — Sendo z o número complexo $z = x + iy$ representado pelo ponto $M(x, y)$, referido a eixos rectangulares, achar o lugar geométrico de M quando o argumento de $z^2 - 1$ é constante, e o lugar geométrico de M quando o módulo de $z^2 - 1$ é constante.

212 — Por dois pontos A, B duma hipérbole, traçam-se paralelas às assíntotas. Provar:

1.º — Que uma das diagonais do paralelogramo assim formado passa pelo centro da curva;

2.º — Que metade dessa diagonal é meia proporcional entre as distâncias do centro do paralelogramo ao centro da curva e ao ponto em que ela encontra a tangente em A;

3.º — Que esta mesma diagonal é meia proporcional entre as distâncias do centro do paralelogramo aos pontos em que a segunda diagonal corta a curva.

RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS PROPOSTOS NO N.º 1 DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Consideraremos os problemas propostos no n.º 1 da «Gazeta de Matemática» com a numeração 110, 111, 112 e 113 para facilitar futuras referências.

110 — Considerando o sólido dividido em cilindros elementares, de base $a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$ (1) e altura dz, teremos

$$V = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3)\,dz = \frac{a_1}{12} h^3 + a_3 h \qquad (2)$$

Por outro lado

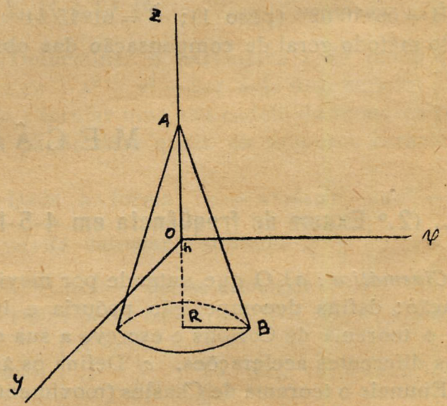
$$\begin{cases} B_1 = a_0\left(-\dfrac{h}{2}\right)^3 + a_1\left(-\dfrac{h}{2}\right)^2 + a_2\left(-\dfrac{h}{2}\right) + a_3 \\ B_2 = a_0\left(\dfrac{h}{2}\right)^3 + a_1\left(\dfrac{h}{2}\right)^2 + a_2\dfrac{h}{2} + a_3 \\ M = a_3 \end{cases}$$

logo
$$V = \frac{1}{6} h [B_1 + B_2 + 4M] = \frac{a_1}{12} h^3 + a_3 h \qquad (3)$$

Como vemos as expressões (*2*) e (*3*) são idênticas como se queria demonstrar.

Cone: Vejamos que aspecto toma (*1*) neste caso particular. A equação da recta geratriz $\overline{AB}$, situada no plano dos xz é $z = -\dfrac{h}{R}x + \dfrac{h}{2}$. Para termos a equação da superfície cónica de revolução em tôrno do eixo dos zz basta mudar x em $\sqrt{x^2+y^2}$ e portanto

$$z = -\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} + \frac{h}{2} \quad \text{donde} \quad x^2 + y^2 = \frac{R^2}{h^2}z^2 - \frac{R^2}{h}z + \frac{R^2}{4}.$$



A área de qualquer secção dum plano horizontal é

$$\frac{\pi R^2}{h^2}z^2 - \frac{\pi R^2}{h}z + \frac{\pi R^2}{4} \qquad (1')$$

pois $x^2 + y^2$ é o raio de cada uma dessas secções; vê-se que