ASTRONOMIA

F. C. L. (2.º Exame de freqüência em 8-5-1939)

207 — *a)* Defina directriz e linha média de um nível. Diga o que entende por nível calado e por nível rectificado. *b)* Defina colimação de um instrumento de passagens colocado no meridiano. Que métodos conhece para a determinação de colimação? *c)* Quais as estrêlas mais convenientes para a determinação de azimute de um I. P. colocado no meridiano; justifique a resposta. *d)* Como se reduzem as observações feitas nos diferentes fios do retículo, de um I. P. colocado no meridiano, ao fio do meio? *e)* O que é paralaxe de um astro? Que espécies de paralaxe conhece? *f)* Indique as principais diferenças entre os métodos de Gago Coutinho e de Talcott (determinação de latitude).

208 — *a)* Observaram-se duas estrêlas na sua passagem meridiana e determinaram-se os tempos $\theta_1 = 15^h\,20^m\,24^s,80$ e $\theta_2 = 15^h\,30^m\,10^s,04$ das suas passagens na média dos fios. Pretende conhecer-se o azimute do I. P., supondo-se constante o êrro de nível e nulo o de colimação. A latitude do lugar de observação é $\varphi = 38^o\,43'\,0''$, e as coordenadas das estrêlas são

$$\begin{cases} \alpha_1 = 15^h\,18^m\,12^s,40 \\ \delta_1 = -5^o\,20'\,12'',00 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \alpha_2 = 15^h\,27^m\,54^s,40 \\ \delta_2 = 55^o\,10'\,25'',00 \end{cases}$$

R: $\alpha = 2^s,71$.

b) Supondo que $\theta_1 = 15^h\,20^m\,14^s,80$ é o tempo sideral de Lisboa, determinar a hora legal nesse instante. A longitude de Lisboa é $\lambda = +0^h\,36^m\,44^s,68$ R: $H_L = 0^h\,57^m\,8^s,27$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

209 — Mostrar que a primitiva de $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2(x-d)^2}$ se reduz a uma função racional quando se verifica a relação harmónica $2(ab+cd)=(a+b)(c+d)$.

210 — Determinar um conjunto ordenado de cinco algarismos e uma base de numeração tais que o número representado por êsse conjunto nessa base seja duplo do número representado pelo mesmo conjunto na base dez.

211 — Sendo z o número complexo $z = x + iy$ representado pelo ponto $M(x, y)$, referido a eixos rectangulares, achar o lugar geométrico de M quando o argumento de $z^2 - 1$ é constante, e o lugar geométrico de M quando o módulo de $z^2 - 1$ é constante.

212 — Por dois pontos A, B duma hipérbole, traçam-se paralelas às assíntotas. Provar:

1.º — Que uma das diagonais do paralelogramo assim formado passa pelo centro da curva;

2.º — Que metade dessa diagonal é meia proporcional entre as distâncias do centro do paralelogramo ao centro da curva e ao ponto em que ela encontra a tangente em A;

3.º — Que esta mesma diagonal é meia proporcional entre as distâncias do centro do paralelogramo aos pontos em que a segunda diagonal corta a curva.

RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS PROPOSTOS NO N.º 1 DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Consideraremos os problemas propostos no n.º 1 da «Gazeta de Matemática» com a numeração 110, 111, 112 e 113 para facilitar futuras referências.

110 — Considerando o sólido dividido em cilindros elementares, de base $a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$ (1) e altura dz, teremos

$$V = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3)\, dz = \frac{a_1}{12} h^3 + a_3 h \qquad (2)$$

Por outro lado

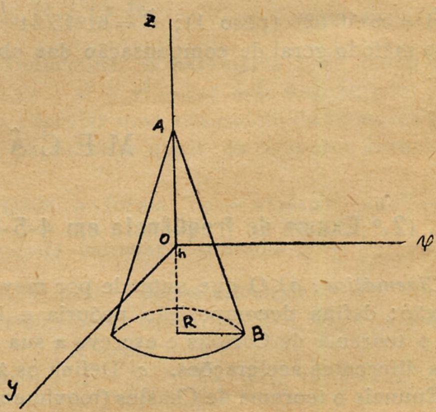
$$\begin{cases} B_1 = a_0\left(-\dfrac{h}{2}\right)^3 + a_1\left(-\dfrac{h}{2}\right)^2 + a_2\left(-\dfrac{h}{2}\right) + a_3 \\ B_2 = a_0\left(\dfrac{h}{2}\right)^3 + a_1\left(\dfrac{h}{2}\right)^2 + a_2\dfrac{h}{2} + a_3 \\ M = a_3 \end{cases}$$

logo
$$V = \frac{1}{6} h [B_1 + B_2 + 4M] = \frac{a_1}{12} h^3 + a_3 h \qquad (3)$$

Como vemos as expressões (2) e (3) são idênticas como se queria demonstrar.

Cone: Vejamos que aspecto toma (1) neste caso particular. A equação da recta geratriz $\overline{AB}$, situada no plano dos xz é $z = -\dfrac{h}{R} x + \dfrac{h}{2}$. Para termos a equação da superfície cónica de revolução em tôrno do eixo dos zz basta mudar x em $\sqrt{x^2+y^2}$ e portanto

$$z = -\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} + \frac{h}{2} \quad \text{donde} \quad x^2+y^2 = \frac{R^2}{h^2} z^2 - \frac{R^2}{h} z + \frac{R^2}{4}.$$



A área de qualquer secção dum plano horizontal é

$$\frac{\pi R^2}{h^2} z^2 - \frac{\pi R^2}{h} z + \frac{\pi R^2}{4} \qquad (1')$$

pois $x^2 + y^2$ é o raio de cada uma dessas secções; vê-se que não há termo em z^3, isto é, $a_0=0$. Então

$$V_{cone}=\frac{1}{6}h\left[\pi R^2+0+4\frac{\pi R^2}{4}\right]=\frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Esfera: A sua equação, em relação a 3 eixos ortogonais de origem no centro da esfera, é $x^2+y^2=-z^2+R^2$. Logo aqui a expressão (*1*) toma o aspecto $-\pi z^2+\pi R^2$. $(1'')$

Também aqui não há têrmo em z^3, quere dizer, $a_0=0$; mas além dêste coeficiente é ainda nulo a_2. Então

$$V_{esf.}=\frac{1}{6}2R\left[0+0+4\pi R^2\right]=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

JOSÉ ARANDES

— **111** — *a)* Para determinar o $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^n}$, onde n é a variável inteira, notemos que será $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ onde x é a variável contínua, se existir $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Então, teremos aplicando duas vezes a regra de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=2\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0 \quad \text{e portanto} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^n}=0.$$

A. S. C.

— **111** — *b)* Aplicando a regra de l'Hôpital e supondo que o limite é A,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (1+\operatorname{sen}2t)^{\frac{1}{t}}\,dt=\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}2x)^{\frac{1}{x}}=A.$$

Determinemos A: Sabe-se que

$$\log A=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(1+\operatorname{sen}2x)$$

e, aplicando a regra de l'Hôpital, vem

$$\log A=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{1+\operatorname{sen}2x}=2$$

logo será $A=e^2$.

A. S. C.

— **113** — Seja p o número médio, dos $2n+1$ números que satisfazem às condições do enunciado. Será:

$$(p-n)^2+\cdots+(p-1)^2+p^2=(p+1)^2+\cdots+(p+n)^2$$

ou

$$(n+1)p^2+(1+2^2+\cdots+n^2)-2p(1+2+\cdots+n)=$$
$$=np^2+(1+2^2+\ldots+n^2)+2p(1+2+\ldots+n)$$

donde

$$p^2=2pn(n+1)$$

e o problema tem duas soluções:

I) $-n,\ldots 0,\ldots n$

II) $2n^2+n,\ldots 2n^2+2n,\ldots 2n^2+3n$.

Para $n=1$ II) dá-nos as medidas dos lados do triângulo de ouro; para $n=2$ é-se conduzido ao 1.º problema sob a epígrafe *Curiosidades* no presente número da Gazeta.

RECTIFICAÇÕES

Da preparação apressada do 1.º número da «Gazeta de Matemática» resultaram inúmeras imperfeições (erros, gralhas etc.) que aqui ficam convenientemente rectificadas.

Pede-se aos colaboradores da «Gazeta» que escrevam de um modo perfeitamente legível, para que fiquem facilitadas as tarefas de verificação e revisão de provas.

— **5** — Substituir no enunciado dêste exercício $\cos^2 b$ por $\operatorname{sen}^2 b$.

— **22** — Substituir na resposta:

$$\begin{cases} x+3y=15 \\ 3x+2y=11 \end{cases} \text{por} \begin{cases} x+3y=15\times 4 \\ 3x+2y=11\times 5 \end{cases},\quad x=3/7\,\% \text{ por } x=6\,3/7\,\%$$

$$\text{e } y=4\,6/7\,\% \text{ por } y=17\,6/7\,\%.$$

— **29** — Substituir no resultado $n=0$ por $n=2$, e o período final por êste outro: *As soluções são* $x=r$, *para* $n=1$, *e* $x=0$, *para* $n=2$.

— **35** — Substituir no resultado $-\frac{3}{2}$ por $-\frac{15}{8}$.

— **44** — Acrescentar à alínea *b)* do resultado a solução $z_3=0$.

— **48** — Substituir no resultado

$$\pm\sqrt[4]{\frac{1}{k-1}} \text{ por } \sqrt[4]{-\frac{1}{3}} \text{ e } \frac{1}{\pm\sqrt{2+k}} \text{ por } \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

— **53** — Mostrar que tôdas as raízes da equação:

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^3=\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \quad \text{são reais.}$$

R:
$$\frac{1+ix}{1-ix}=\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$$

$$\left(com\quad \theta=\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3},\quad k=0,1,2\right)$$

donde

$$x=\frac{1-\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta-(1+\cos\theta)i}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}\right),$$

expressão que só toma 3 valores reais, c. q. p.

— **57** — Substituir no resultado

$$V(x)=\frac{1}{3}\pi\frac{r^2x^2}{4\pi^2}\sqrt{r^2-\frac{r^2x^2}{4\pi}} \text{ por } V(x)=\frac{1}{3}\pi\frac{r^2x^2}{4\pi^2}\sqrt{r^2-\frac{r^2x^2}{4\pi^2}}.$$

— **65** — Averigue se há polinómios inteiros em x que satisfaçam à equação

$$y''+(x-1)y'-4y=0 \quad \left(y'=\frac{dy}{dx};\ y''=\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

R: *Seja* $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+a_4x^{n-4}+\ldots+a_n$ *Calculando* y' *e* y'' *e substituindo na equação diferencial* $y''+(x-1)y'-4y=0$ *vem* $(n-4)a_0x^n+(-a_1-4a_0)x^{n-1}+$ $+(12a_0-3a_1-2a_2)x^{n-2}+(6a_1-2a_2-3a_3)x^{n-3}+\cdots=0$ *donde* $n=4 \rightarrow a_1=-4a_0$, $a_2=12a_0$, $a_3=-16a_0$ e $a_4=10a_0$ *e portanto* $y=a_0(x^4-4x^3+12x^2-16x+10)$.