se verifique a condição $\overline{AP} \simeq \overline{BP}$ (tese), basta que se tenha $[AMP] \simeq [BMP]$ e $A\hat{M}P \simeq B\hat{M}P$ (visto que, em triângulos congruentes, a ângulos congruentes se opõem lados congruentes); mas a última congruência resulta da hipótese, pois que, sendo u (ou MP) perpendicular a AB, os ângulos $A\hat{M}P$ e $B\hat{M}P$ serão rectos e portanto congruentes: resta-nos, pois, a condição $[AMP] \simeq [BMP]$; mas, como os triângulos [AMP] e [BMP] são rectângulos, e um cateto dum é congruente a um cateto do outro (o lado $\overline{MP}$ comum[1], a última congruência será satisfeita, desde que se tenha $\overline{AM} \simeq \overline{BM}$; ora, esta condição resulta imediatamente da hipótese, pois, como dissemos, M é o ponto médio de $\overline{AB}$: assim o teorema fica demonstrado.

Muitas vezes, as demonstrações feitas pelo método analítico são conduzidas de modo que o têrmo inicial seja a proposição dada, α, e o têrmo final, uma proposição, ω, conhecida como verdadeira, conforme o seguinte esquema: $\alpha \prec\!\!- \prec\!\!- \alpha_1 \prec\!\!- \cdots \prec\!\!- \alpha_n \prec\!\!- \omega$. É claro que, na redução de α a α_1, de α_1 a α_2, etc., intervêm proposições conhecidas, em geral distintas de ω, mas na demonstração é atribuída a esta um papel de relêvo, como se a veracidade de α ficasse reduzida, por êste processo, à veracidade de ω, e só à dessa proposição — o que não é exacto.

Em geral, aplica-se êste método, quando as sucessivas proposições são mesmo equivalentes entre si. São dêste género as demonstrações que, vulgarmente, se apresentam como «verificações de identidades», em que a passagem de cada têrmo para o seguinte é feita com a aplicação dos chamados «princípios de equivalência das equações». Exemplo: Seja o teorema: $\sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a\,b}$ [1]; para a sua demonstração consideremos, sucessivamente, as seguintes proposições, *equivalentes entre si:* $(\sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{a\,b})^m$, $(\sqrt[m]{a})^m . (\sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{a\,b})^m$, $a\,b = a\,b$; mas a última proposição é incondicionalmente verdadeira (trata-se duma identidade): logo, também a primeira, *equivalente a esta,* será incondicionalmente verdadeira, e assim o teorema está demonstrado. Notemos que, neste exemplo, intervieram não só os princípios de equivalência, mas ainda: 1) propriedade relativa à potência dum produto; 2) definição de potência; 3) propriedades da igualdade.

(Continua) JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

[1] Em virtude das convenções adoptadas no § 12, a hipótese dêste teorema («a e b são números» e «m é um número inteiro») é supérflua, e assim o teorema fica reduzido à tese, proposição incondicionalmente verdadeira neste caso. Supomos, é claro, que se trata aqui apenas de raizes positivas.

EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geógrafo.

555 — Para que valores de m são reais e desiguais as quatro raízes da equação: $2x^4-(3m-2)\,x^2+m^2-4=0$. R: *Para que as quatro raizes sejam reais e desiguais é necessário e suficiente que o descriminante, a soma e o produto das raizes da equação resolvente* $2x^2-(3m-2)\,x+m^2-4=0$, *sejam positivos, o que torna as suas raizes reais, desiguais e positivas. Quere dizer será:* $(3m-2)^2-8m^2+32>0$; $3m-2>0$ *e* $m^2-4>0$. *Estas desigualdades são satisfeitas: a 1.ª para qualquer valor real de* m; *a 2.ª para* $m>2/3$ *e a 3.ª para valores de* m *tais que* $m>2$ *ou* $m<-2$. *Satisfazem pois às três desigualdades simplesmente os valores de* m *reais tais que* $m>2$. J. C.

556 — Aplique a fórmula do desenvolvimento do binómio de Newton ao desenvolvimento de $(1+x)^4$. R: $(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$. J. C.

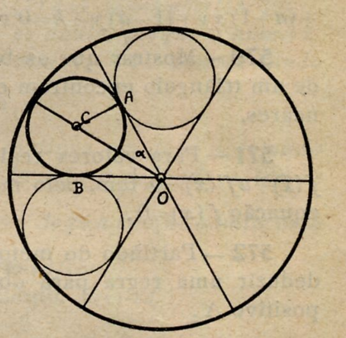
557 — Defina algèbricamente o logarítmo do número N no sistema de base a. Calcule o logarítmo de 16 no sistema de base 2. R: *Chama-se logarítmo do número* N *no sistema de base* a *ao número* x *tal que* $a^x=N$. *Assim* $\log_2 16 = x$, $2^x=16$ $x=4$. J. C.

558 — Os comprimentos das bases de um trapézio rectângulo são $16^m,32$ e $13^m,86$ e o da altura é $4^m,29$. Calcule recorrendo ao cálculo logarítmico, os valores dos ângulos do trapézio. R: *Como é óbvio dois dos ângulos são rectos e os outros dois são os ângulos agudos dum triângulo rectângulo de que os catetos são* $4^m,29$ *e* $2^m,46=16^m,32-13^m,86$. *E será então* $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2,46}{4,29}$ *donde* $\log \operatorname{tg}\alpha = 0,39094+\bar{1},36754=\bar{1},75848$ *e* $\alpha=29^\circ\,49'\,52''$ *e* $\beta=60^\circ\,10'\,8''=90^\circ-29^\circ\,49'\,52''$. J. C.

559 — Verifique a igualdade: $\operatorname{sen}(a+b)\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 b$. R: $\operatorname{sen}(a+b)\operatorname{sen}(a-b)=(\operatorname{sen} a\cos b+\operatorname{sen} b\cos a)\times(\operatorname{sen} a\cos b-\operatorname{sen} b\cos a)=\operatorname{sen}^2 a\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 b\cos^2 a=\operatorname{sen}^2 a\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 b(1-\operatorname{sen}^2 a)=\operatorname{sen}^2 a(\cos^2 b+\operatorname{sen}^2 b)-\operatorname{sen}^2 b=\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 b$. J. C.

560 — Determine, sem recorrer às tábuas, os valores de: $\cos 75^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ)$ e de $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{13}{3}\pi\right)$. R: $\cos 75^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ)=\cos 30^\circ\cos 45^\circ-\operatorname{sen} 30^\circ\operatorname{sen} 45^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$; $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{13}{3}\pi\right)=-\operatorname{tg}\dfrac{13}{3}\pi=-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$. J. C.

561 — Considere uma circunferência de raio r. Trace uma outra circunferência de raio $\dfrac{r}{3}$ e que seja tangente interiormente à primeira. Demonstre que há um número inteiro de circunferências nas condições da 2.ª e que são tangentes entre si. R: *Da figura, considerando o triângulo* [OAC], *deduz-se que* $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{AC}{OC}=\dfrac{1}{2}$ *donde* $\alpha=30^\circ$ *e portanto* $A\hat{O}B=60^\circ$. *Como* $360^\circ=6\cdot 60^\circ$ *conclue-se que há um número inteiro de circunferências nas condições do enunciado; êsse número é evidentemente* 6. J. C.



562 — Numa divisão, com resto diferente de zero ¿qual é o menor número de unidades que pode juntar ao dividendo sem alterar o resto? Justifique a resposta. R: *Tem-se* (1) $D=dq+r$, $r<d$; *adicionando* m *a ambos os membros de* (1) *vem* (2) $m+D=dq+r+m$. *Para que* m *seja o menor número nas condições do enunciado, deverá ser* (3) $m+D=d(q+1)+r$ *ou atendendo a* (2) *e* (3) $r+dq+m=d(q+1)+r$ *e portanto* $m=d$. J. C.

I. S. C. E. F. — 11 de Outubro de 1940

563 — *a)* Quais são as superfícies de revolução mais importantes que conhece? Como podem ser geradas? Dê as suas definições como lugares geométricos. Descreva-as sumàriamente. *b)* É dado um triângulo isósceles cuja altura é igual ao dôbro da base. Faz-se girar êsse triângulo em tôrno da base; exprima a área do sólido obtido em função da altura do triângulo. R: *b) O sólido gerado é constituido por dois cones da base comum e simétricos em relação ao plano desta. A área do sólido é, portanto, o dôbro da área lateral de um dos cones. Qualquer dêstes tem por base um círculo de raio* $r=2b$, *sendo* b *a base do triângulo dado, e por altura* $h=b/2$. *Logo* $S=2\sqrt{17}\,b\pi$.

564 — Determinar o raio da base e a altura dum cone circular recto sabendo que o seu volume é $\frac{4}{3}\pi a^3$ e que a sua área total é πb^2. Discussão. R: *O enunciado conduz ao sistema*

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{4}{3}\pi a^3 \quad g^2=r^2+h^2 \\ \pi r(g+r)=\pi b^2 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} r^2 h=4a^3 \\ r^4+r^2h^2=(b^2-r^2)^2 \end{cases} \quad donde$$

$$r=\pm\frac{\sqrt{b^4\pm\sqrt{b^8-128b^2a^6}}}{2b}.$$ *Condição de possibilidade* $b^6>128a^6$ *e o problema terá duas soluções.*

565 — Determinar m de modo que a fracção $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+2x+m}$ seja positiva para todo o valor real de x. Justifique a determinação. R: *A fracção dada será positiva se a desigualdade* $x^2+2x+m>0$ *se verificar qualquer que seja* x *real, visto que o numerador é sempre positivo o que conduz a* $m>1$.

566 — Seja um triângulo rectângulo de catetos b e c e seja $b+c=S$, $b-c=S'$. Exprimir em função de S e S' a razão das áreas do triângulo e do seu círculo circunscrito. R: *Tem-se imediata e sucessivamente* $b=\frac{S+S'}{2}$, $c=\frac{S-S'}{2}$, $a^2=\frac{1}{2}(S^2+S'^2)$ $A_t=\frac{1}{8}(S^2-S'^2)$, $A_c=\frac{\pi}{8}(S^2+S'^2)$, *donde* $\frac{A_t}{A_c}=\frac{S^2-S'^2}{S^2+S'^2}\cdot\frac{1}{\pi}$.

567 — Determinar o maior e o menor valor que pode tomar a soma do seno com o coseno dum mesmo ângulo. R: *A soma* $S=\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha=\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ *pode escrever-se* $S=2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,.\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$. *Como se reconhece, imediatamente,* S *será máximo quando o fôr* $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, *ou o que é o mesmo, quando fôr* $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$ *e, portanto,* $\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{4}$ (k *inteiro*).

568 — Defina progressão aritmética. Resolva o seguinte problema: Numa progressão aritmética de $n+1$ termos, conhece-se a soma s dos n primeiros termos e a soma S dos n últimos. Calcular os elementos da progressão. R: *A relação* $a+S=s+a+rn$ *dá-nos* $r=\frac{S-s}{n}$ *e a relação* $a+S=\frac{1}{2}(2a+rn)(n+1)$ *conjuntamente com o resultado anterior* $a=\frac{(3-n)S+(n-1)s}{2n}$ *e podemos calcular os elementos da progressão.*

As soluções dos exercícios 565 a 568 foram-nos cedidas pelo assistente Dr. Augusto Sá da Costa.

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. C.—2.º exame de freqüência, 1940

569 — Determinar h de maneira que a equação $a^2+ay^2+(a+1)xy+(1-a)y+h=0$ represente duas rectas.

570 — Mostrar que as bissectrizes dos ângulos externos de um triângulo encontram os lados opostos em pontos colineares.

571 — Para valores reais de a, mostrar que a equação $f(x)+af'(x)=0$ tem, pelo menos, tantas raízes reais como a equação $f(x)=0$.

572 — Partindo do método de aproximação de Newton, deduzir uma regra para obter a raiz quadrada do número positivo A.

573 — ¿Qual é a condição para que a equação $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ tenha duas raízes cuja soma seja igual à soma das outras duas?

F. C. L. — 2.º Exame de freqüência, Maio e Junho de 1940

574 — Complete, de forma que seja recíproca, e resolva a equação $6x^6+5x^5-44x^4+44x^2+\cdots=0$. R: *Os termos que faltam são* $-5x$ e -6. *As raizes são* $\pm1, 2, 1/2, -3, -1/3$.

575 — Deduza a equação da circunferência que passa por $P(0,1)$ e forma com a circunferência $x^2+y^2-3x+4y+5=0$ um sistema de eixo radical r_1, sendo r_1 tangente a $x^2+y^2-2x-4y-5=0$ no ponto $P(0,5)$. R: $6(x^2+y^2)-35x+13y-45=0$.

576 — Deduza as equações duma recta que passe pelo ponto P e faça com OX e OZ ângulos de 45º e 60º respectivamente; P é traço da recta $x=2z-6$, $y=3z-1$ no plano π; π é um plano paralelo a $x-y+\sqrt{2}z-7=0$, cortando a esfera $x^2+y^2+z^2-4x+2y-20=0$ segundo uma circunferência de raio igual a 3. R: $\frac{x-\left[\frac{20}{\sqrt{2}-1}-6\right]}{\sqrt{2}}=\frac{y-\left[\frac{30}{\sqrt{2}-1}-6\right]}{1}=\frac{z-\frac{10}{\sqrt{2}-1}}{1}$.

577 — Resolva a equação $2x^5-x^4-11x^3+16x^2-30x+36=0$. R: $2, -3, \frac{3}{2}, \pm\sqrt{2}\,i$.

578 — Calcule a área do paralelogramo definido pelas rectas de equações $2x-5y+14=0$, $5x+y-19=0$, $2x-5y-13=0$ e $5x+y+8=0$. R: $S=27$.

579 — Deduza as equações da recta definida pelos pontos P_1 e P_2; P_1 é um dos pontos da esfera $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0$, em que o raio é paralelo a $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{1}$, e P_2 é o ponto de encontro das rectas r_1 e r_2 de equações $x=5z-2$,

$y=z$ e $z=x-2$, $y=2x-5$. R: $\frac{x}{3}=\frac{z-2}{-1}$, $y=1$ *e* $\frac{x-4}{-1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-4}{-3}$.

580 — Resolva a equação $5x^5+6=0$ usando o método das equações recíprocas. R: $-\sqrt[5]{\frac{6}{5}}$, $\sqrt[5]{\frac{6}{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{2(\sqrt{5}-5)}}{4}$, $\sqrt[5]{\frac{6}{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{2(\sqrt{5}+5)}}{4}$.

581 — Deduza a equação da circunferência que passa por P_1 e é tangente a r_1 no ponto $P_2(-3,-1)$; P_1 é a intersecção de $3x-2y-3=0$ com a mediana relativa ao vértice A do triângulo definido pelos pontos $A(0,-1)$ $B(1,3)$ $C(5,1)$, e r_1 é paralela ao lado BC do mesmo triângulo. R: $6(x^2+y^2)+19x-22y-25=0$.

582 — Calcule a distância da recta r_1 à recta r_2; r_1 é eixo radical do sistema formado pelas esferas de equações $x^2+y^2+z^2-3x+2y+z-12=0$, $x^2+y^2+z^2+x-z=0$, $x^2+y^2+z^2+2y-6=0$ e r_2 é a recta de equações $x=3z-1$, $y=z+2$. R: $d=1/\sqrt{6}$.

583 — Escreva uma equação de 4.º grau que admita as raízes 1 e 2 e cujo primeiro membro dê de resto -90 e -144 quando dividido por $(x+1)$ e $(x+2)$ respectivamente. R: $(x+1)(x+2)(x+4)(x-4)=0$.

584 — Deduza a equação duma recta que faça com OY um ângulo de 30º e passe à distância 2 do centro da circunferência $x^2+y^2+2x-6=0$. R: $x-\sqrt{3}y-3=0$ *e* $x-\sqrt{3}y+5=0$.

585 — Deduza as equações da perpendicular comum às rectas r_1 e r_2 e que as encontra; r_1 passa em $P_1(1,0,0)$ e é paralela a OZ, r_2 passa em $P_2(1,-1,1)$ e é paralela a $\frac{x+5}{-2}=\frac{z-1}{-3}$, $y=0$. R: $\begin{cases} x=1 \\ z=1. \end{cases}$

586 — Desembarace a equação $2x^5+5x^4-120x^3+12x^2-x+3=0$ do têrmo em x^3. R: $2x^5+25x^4-428x^2-1073x-767=0$ *e* $2x^5-25x^4+822x^2-3043x+3273=0$.

587 — Dàdas as rectas r_1 e r_2 deduza a equação duma recta que passe pelo ponto de abcissa 5 da recta r_1 e forme com as rectas dadas um triângulo de área $S=7$; $r_1 \equiv 3x-2y-7=0$, $r_2 \equiv x+4y-7=0$. R: $2x+y-14=0$ *e* $x-3y+7=0$.

588 — Deduza a equação do plano que passa pelo centro da circunferência Γ e pelo centro da esfera $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$ e que é paralelo a OY; Γ é a intersecção da esfera $3(x^2+y^2+z^2)-18x-30y-12z-5=0$ com o plano YOZ. R: $2x+z-2=0$.

589 — Servindo-se da regra dos sinais de Descartes indique quais as possíveis distribuïções das raízes da equação $x^5-4x^3-3x^2+x-2=0$ nos campos positivo, negativo e imaginário. R: *As distribuïções possíveis são:* a) *3 pos., 2 neg., 0 imag.;* b) *3 pos., 0 neg., 2 imag.;* c) *1 pos., 2 neg., 2 imag.;* d) *1 pos., 0 neg., 4 imag.*

590 — Deduza a equação da recta que passa pela intersecção de r_1 e r_2 e é paralela a r_3; $r_1 \equiv 3x-y+7=0$, $r_2 \equiv 2x-y+5=0$; r_3 é bissectriz de um dos ângulos formados pelas rectas $5x-2y-1=0$ e $2x-5y-13=0$. R: $r' \equiv x+y+1=0$ *ou* $r'' \equiv x-y+3=0$.

591 — Deduza a equação da esfera que passa pela origem das coordenadas e forma com a esfera Σ um sistema de plano radical π; Σ é tangente ao plano $2x-y+2z-6=0$ no ponto $P_1(1,-2,1)$ e com o centro no plano $3x-2z+1=0$, π é um plano paralelo ao plano $2x-y-2z+6=0$ à distância 2 do centro de Σ. R: $5(x^2+y^2+z^2)+22x+4y-2z=0$ *e* $7(x^2+y^2+z^2)+2x+26y+26z=0$.

Os exercícios 574 a 591 e respectivas soluções foram-nos cedidos pelo assistente Dr. J. Pais Morais.

I. S. C. E. F. — 2.º Exame de freqüência, 17-6-1940.

592 — Determinar um polinómio do 5.º grau que satisfaça à relação $P(x)+P'(x)-P''(x)-P'''(x)+P^{IV}(x)-P^{V}(x)=\frac{x^5}{5!}+\frac{x^4}{4!}$. Estudar a equação $P(x)=0$ e determinar as suas raízes reais com uma casa decimal. R: *Seja* $P(x)=a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5$; *será* $P'(x)=5a_0x^4+4a_1x^3+3a_2x^2+2a_3x+a_4$, $-P''(x)=-20a_0x^3-12a_1x^2-6a_2x-2a_3$, $-P'''(x)=-60a_0x^2-24a_1x-6a_2$, $P^{IV}(x)=120a_0x+24a_1$, $-P^{V}(x)=-120a_0$.

De $P+P'-P''-P'''+P^{IV}-P^{V}=\frac{x^5}{5!}+\frac{x^4}{4!}$, *vem*

$$\begin{cases} a_0=1/5! \\ 5a_0+a_1=1/4! \\ -20a_0+4a_1+a_2=0 \\ -60a_0-12a_1+3a_2+a_3=0 \\ 120a_0-24a_1-6a_2+2a_3+4_4=0 \\ -120a_0+24a_1-6a_2-2a_3+a_4+a_5=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0=1/5! \\ a_1=0 \\ a_2=1/3! \\ a_3=0 \\ a_4=0 \\ a_5=0 \end{cases}$$

e, finalmente, $P(x)=x^5/5!+x^3/3!$. *A equação* $x^5/5!+x^3/3!=0$, *ou, o que é o mesmo, a equação* $x^5+20x^3=0$ *admite, como imediatamente se reconhece, a raiz nula (tripla) e as raizes imaginárias conjugadas* $\pm 2\sqrt{5}i$, *logo escrever-se-á* $P(x)=1/5!\,.\,x^3(x^2+20)=0$.

593 — Estudar e representar geomètricamente a função $y(x)=\frac{e^x}{x-1}$. R: *Estudo da função* $y=\frac{e^x}{x-1}$.

Domínio: *Os intervalos* $(-\infty,1)$ *e* $(1,+\infty)$ *abertos.*

Valores particulares: *Nunca se anula, porque o numerador nunca se anula. Para* $x=0$ *vem* $y=-1$. *Tem-se ainda*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x-1}=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x-1}=0.$$

Continuïdade: *A função é continua em todo o dominio de definição. Para* $x=1$ *a função não é definida e tem-se*

$\lim_{x\to 1-0}\frac{e^x}{x-1}=-\infty$ e $\lim_{x\to 1+0}=+\infty$; *logo a função admite uma descontinuïdade de 2.ª espécie (salto infinito).*

Máximos e mínimos. Crescimento. *Tem-se*

$$y'=\frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=e^x\frac{x-2}{(x-1)^2}, \quad y'=0 \leftarrow x=2,$$

$$y''=\frac{e^x(x-1)^2-2e^x(x-2)}{(x-1)^3}=e^x\frac{x^2-4x+5}{(x-1)^3}, \quad y''(2)=e^2$$

e a $x=2$ *corresponde um minimo para a função:* $y=e$.

Reconhece-se imediatamente que nos intervalos abertos $(-\infty,1)$, $(1,2)$ *e* $(2,+\infty)$ *os sinais de* y' *são respectivamente* $-$, $-$, $+$; *logo, a função é decrescente nos dois primeiros intervalos e crescente no último.*

Inflexões. Sentido da concavidade. $y''=e^x\frac{x^2-4x+5}{(x-1)^3}$, $y''=0 \leftarrow x^2-4x+5=0 \leftarrow x=2\pm i$ *e não há inflexões.*

A segunda derivada é negativa no intervalo aberto $(-\infty, 1)$ *e positiva no intervalo aberto* $(1, +\infty)$, *visto que o seu sinal depende ùnicamente do denominador, pois é sempre* $e^x > 0$ *e* $x^2 - 4x + 5 > 0$.

I. S. C. E. F. — 2.º Exame de freqüência, 24-6-1940

594 — Utilizar o desenvolvimento em série para o cálculo, com um êrro inferior a 10^{-3}, das ordenadas dos pontos de inflexão da curva de equação $y = e^{-2x^2}$. R: *A função* $y = e^{-2x^2}$ *é par, logo basta determinar os pontos de inflexão de abcissa positiva para que todos fiquem determinados.* $y' = -4xe^{-2x^2}$, $y'' = -4e^{-2x^2} + 16x^2 e^{-2x^2} = e^{-2x^2}(16x^2 - x)$, $y'' = 0 \leftarrow 16x^2 - 4 = 0 \leftarrow x = \pm 1/2$, $y''' = -(16x^2 - 4)\,4xe^{-2x^2} + e^{-2x^2} . 32x$, $y'''(1/2) = 16e^{-1/2} \neq 0$ *e* $y'''(-1/2) = -16e^{-1/2} \neq 0$. *Logo, os pontos* $(-1/2, e^{-1/2})$ *e* $(1/2, e^{-1/2})$ *são de inflexão.*

$$e^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4.2!} - \frac{1}{8.3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2^n n!} + \ldots$$

Tratando-se duma série alterna, é um limite superior do resto o valor absoluto do primeiro têrmo desprezado.

$$e^{-1/2} = 1 - 0{,}5 + 0{,}125 - 0{,}020\overline{8} + 0{,}002\overline{6} - \frac{1}{1840} + \ldots$$

No cálculo do 4.º e do 5.º termos cometem-se erros inferiores a 10^{-4}.

Por outro lado se considerarmos apenas os 5 primeiros termos da série, cometeremos um êrro inferior a $\frac{1}{1840}$.

O êrro absoluto será portanto inferior a $\frac{1}{10000} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1840} = \frac{684}{920000} > \frac{1}{1345}$, *logo* $e^{-1/2} \sim 1 - 0{,}5 + 0{,}125 - 0{,}0208 + 0{,}0026 = 0{,}6068$ *é um valor aproximado a menos de* 10^{-3}, *como se pretendia.*

595 — Dada a função $z = x^{\log y} . y^{\log x}$ verificar que

$$\frac{x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{x \dfrac{\partial z}{\partial x} - y \dfrac{\partial z}{\partial y}} = 2 \log (x . y) - 1.$$

R: *A função* $y = x^{\log y} . y^{\log x}$ *pode pôr-se sob a forma* $z = e^{2 \log x \log y}$, *donde:* $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x} 2 \log y e^{2 \log x \log y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y} 2 \log x e^{2 \log x \log y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} 2 \log y e^{2 \log x \log y} + \frac{1}{x^2} 4 \log^2 y e^{2 \log x \log y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2} 2 \log x e^{2 \log x \log y} + \frac{1}{y^2} 4 \log^2 x e^{2 \log x \log y}$. $A = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^{2 \log x \log y}(-\log y + 2 \log^2 y + \log x - 2 \log^2 x)$.

$B = x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 2e^{2 \log x \log y}(\log y - \log x)$.

$$\frac{A}{B} = \frac{\log x - \log y + 2 \log^2 y - 2 \log^2 x}{\log y - \log x} = 2 \frac{\log^2 y - \log^2 x}{\log y - \log x} - 1 = 2 \log (xy) - 1$$

596 — Dado o vector $u = aI + bJ + cK$ 1.º) mostrar que os 3 vectores $u_1 = u \wedge I$, $u_2 = u \wedge J$, $u_3 = u \wedge K$ são coplanares e paralelos a um plano perpendidular ao vector u; 2.º) verificar que $u_1 \wedge u_2 + u_2 \wedge u_3 + u_3 \wedge u_1 = (a + b + c)\, u$; 3.º) determinar os ângulos que formam, dois a dois, os vectores u_1, u_2, u_3. R: $u = aI + bJ + cK$, $u_1 = u \wedge I = cJ - bK$, $u_2 = u \wedge J = -cI + aK$, $u_3 = u \wedge K = bI - aJ$. *São coplanares:* $u_1 \wedge u_2 | u_3 = \begin{vmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & c \end{vmatrix} = 0$.

Qualquer dos três vectores u_1, u_2, u_3 *é perpendicular a* u, *logo os três são paralelos a qualquer plano perpendicular a* u. $u_1 \wedge u_2 = acI + bcJ + c^2 K$, $u_2 \wedge u_3 = a^2 I + abJ + acK$, $u_3 \wedge u_1 = abI + b^2 J + bcK$; $u_1 \wedge u_2 + u_2 \wedge u_3 + u_3 \wedge u_1 = a(a + b + c)I + b(a + b + c)J + c(a + b + c)K = (a + b + c)\, u$. *Tem-se:*

$$\cos (u_1 \wedge u_2) = \frac{-ab}{\sqrt{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2}}, \quad \text{sen} (u_1 \wedge u_2) = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2}},$$

$\text{tg} (u_1 \wedge u_2) = -\frac{c}{ab} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, *e expressões análogas para os outros ângulos.*

As soluções dos exercícios 592 a 596 são do assistente Dr. A. Sá da Costa.

I. S. T. — Alguns pontos do 2.º ex. de freq., 1940

597 — Discutir e resolver o sistema

$$\begin{cases} (a-1)^2 x + (a^2 - 1) y = (a + 1)^2 \\ (2a - 1) x + (a + 1) y = a^2 - 1 \end{cases} \quad (a \text{ parâmetro variável}).$$

R: *A característica da matriz dos coeficientes será* 2 *ou* 1 *conforme fôr* $a \neq 0, \pm 1$, *ou* $a = 0, \pm 1$.

No primeiro caso, $a \neq 0, \pm 1$, *trata-se dum sistema de Cramer, portanto, compatível e determinado e ter-se-á:* $x = y = \frac{(a+1)(a-3)}{a-1}$, *coordenadas do ponto de intersecção das rectas representadas pelas equações do sistema.*

Se $a = 0, -1$, *o sistema é compatível, porque o único característico se anula para qualquer daqueles dois valores de* a $\Delta_c = a(a+1)(a^2 - 5a + 2)$, *e simplesmente indeterminado. As equações do sistema não são distintas e representam a mesma recta* — $x - y - 1 = 0$ *ou* $x = 0$.

Se $a = 1$, *o sistema é incompatível, pois é* $\Delta_c \neq 0$, *e as equações do sistema representam duas rectas paralelas — a recta no infinito do plano* Oxy *e a recta de equação* $x + 2y = 0$.

598 — Achar a excentricidade da cónica $x^2 - 2xy - 5y^2 - 2x + 6y = 0$ (eixos rectangulares).

599 — Sendo M o ponto de encontro do plano $z = 2$ com a recta $r \begin{cases} z = 2x + 1 \\ y + z = 4 \end{cases}$ achar o conjugado harmónico de M, em relação aos pontos A e B de encontro de r com os planos YOZ e XOZ.

600 — Mostrar que a série $\sum_{1}^{\infty} \left(\text{tg} \frac{x}{n}\right)^2$ é convergente para todos os valores de x. R: *A série de termo geral* $v_n = \frac{x^2}{n^2}$ *é convergente para todos os valores de* x. *Prova-o a aplicação do critério de Raabe* $\lim_{n \to \infty} n\left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n \to \infty} n\left(\frac{x^2 (n+1)^2}{x^2 . n^2} - 1\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^2 + n}{n^2} = 2 > 1$, *qualquer que seja* x, *finito e não nulo.*

Comparemos com esta a série proposta: $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\text{tg} \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^2 = 1 \neq 0, \infty$; *as duas séries têm o mesmo carácter e a série dada é pois convergente qualquer que seja* x.

601 — Estudar a curva: $y^2+xy-2x^2+y+5x+3=0$ (eixos rectangulares; traçado gráfico aproximado).

602 — Verificar analìticamente que as rectas que unem os meios das arestas opostas do tetraedro $ABCD$ são concorrentes. Achar as coordenadas do ponto de concurso. $A\,(0,0,0)$; $B\,(6,0,0)$; $C\,(4,8,0)$; $D\,(2,2,10)$.

603 — *a*) Mostrar que a série $\sum \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ para $x=0,1$ é convergente *b)* e calcular a sua soma com 6 decimais exactos. R: a) *A aplicação do critério d'Alembert à série proposta* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}(2n-1)}{x^{2n-1}(2n+1)}\right|=x^2.\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=x^2$ *diz-nos que é* $(-1,1)$ *o seu intervalo de convergência. A série é convergente para* $x=0,1$. b) *A série escreve-se* $\frac{1}{10}+\frac{1}{3.10^3}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\,10^{2n-1}}+\cdots$

Seja $R_p=\frac{1}{(2p+1)\,10^{2p+1}}+\cdots$. *É uma majorante do resto a série* $10^{-1}+10^{-3}+\cdots+10^{-2p+1}+\cdots$ *cujo resto* $\overline{R}_p$ *tem por soma* $\overline{R}_p=\frac{10^{-2p-1}}{1-10^{-2}}=\frac{10^2}{10^{2p+1}(10^2-1)}=\frac{1}{99.10^{2p-1}}$.

Determinemos p *de tal modo que* $\overline{R}_p\leq 10^{-6}\longrightarrow\frac{1}{99.10^{2p-1}}\leq\frac{1}{10^6}$, $99.10^{2p-1}\geq 10^6$, $99.10^{2p-7}\geq 1\longrightarrow p\geq 3$.

Então, por ser $R_p<\overline{R}_p$, *será* $R_p<10^{-6}$ *para* $p\geq 3$.

Finalmente $S_3=0,1+0,003\,333+0,000\,055=0,103\,388$ *é um valor aproximado a menos de* 10^{-6} *da soma da série proposta.*

604 — Dada a cónica $x^2-2xy-3x+1=0$, determinar as tangentes paralelas à recta $2x+y-1=0$. Fazer o respectivo traçado gráfico.

605 — Achar as equações da recta que encontra as rectas $\begin{cases}x=2z+3\\y=2z+7\end{cases}$ e $\begin{cases}x=2z+1\\y=3z+2\end{cases}$ e é paralela a OX. R: *As equações reduzidas duma recta paralela a* Ox *são* $y=p$, $z=q$. *Para que esta recta encontre as rectas dadas, é necessário e suficiente que* p *e* q *satisfaçam, simultâneamente, a* $p=2q+7$ *e* $p=3q+2$ *donde* $p=17$ *e* $q=5$.

606 — Achar o desenvolvimento da série inteira da função $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{a+x}{1-ax}$ (*a* constante) e indicar o respectivo raio de convergência.

607 — Achar o diâmetro da cónica $2x^2-3xy+4y^2-2x-1=0$ perpendicular à recta que passa pelos pontos $A\,(0,4)$ e $B\,(-2,0)$.

608 — Achar a equação do plano que passa pelo ponto $A\,(2,1,-1)$ e é paralelo à recta $x=2z+3$, $y=2$ e perpendicular ao plano $2x+3y-4z+5=0$.

As soluções dos exercícios 597, 600, 603 e 605 são do Dr. Augusto Sá da Costa.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. L. — 2.º Exame de freqüência, Maio e Junho de 1940

609 — Deduza as equações das assíntotas da curva $x^3-xy^2-2ay+a^3=0$.

610 — Calcule $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-x+1}}$.

611 — Calcule a área limitada pelas duas parábolas $y^2-2x=0$ e $x^2-4y=0$.

R: $A=\int_0^{2\sqrt[3]{4}}\left(\sqrt{2x}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left[\frac{1}{3}(2x)^{3/2}-\frac{x^3}{12}\right]_0^{2\sqrt[3]{4}}=\frac{8}{3}$.

M. Z.

612 — Determine os pontos singulares da curva
$$x^4-a^2(x^2+y^2)=0.$$

613 — Calcule $\int\frac{\sqrt[4]{1+x^3}}{x}\,dx$.

614 — Determine a área da superfície gerada pela rotação em tôrno de OX do arco de curva $6xy=x^4+3$ compreendido entre as rectas $x=1$ e $x=2$.

615 — Determine os pontos de inflexão da curva $y=\frac{a^3}{x^2+a^2}$ e as tangentes nesses pontos. R: *Tem-se* $y'=\frac{-2a^3x}{(x^2+a^2)^2}$, $y''=\frac{6a^3x^2-2a^5}{(x^2+a^2)^3}$, $y'''=\frac{12a^3x(x^2+a^2)-6x(6a^3x^2-2a^5)}{(x^2+a^2)^4}$. *As raízes de* $y''=0$ *ou da equação* $3x^2-a^2=0$ *são* $a/\sqrt{3}$ *e* $-a/\sqrt{3}$, *valores que não anulam* y'''. *Os pontos de inflexão da curva, que tem o eixo das ordenadas por eixo de simetria, são* $(a/\sqrt{3},3a/4)$ *e* $(-a/\sqrt{3},3a/4)$ *e as tangentes pedidas, notando que* $y'_{a/\sqrt{3}}=-9/8\sqrt{3}$ *e* $y'_{-a/\sqrt{3}}=9/8\sqrt{3}$, *têm por equações* $Y-3a/4=-9/8\sqrt{3}\,(X-a/\sqrt{3})$ *e* $Y-3a/4=9/8\sqrt{3}\,(X+a/\sqrt{3})$.

M. Z.

616 — Calcule $I=\int\frac{\cos^2 x}{\cos x-\operatorname{sen} x}dx$. R: *Fazendo* $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ *donde* $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}$ *e* $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ *vem*
$$I=\int\frac{2(1-t^2)^2\,dt}{(1-t^2-2t)(1+t^2)^2}=A\log(t+1-\sqrt{2})+B\log(t+1+\sqrt{2})+$$
$$+C\log(t^2+1)+D\operatorname{arc\,tg}+\frac{Et+F}{t^2+1}+\text{const.}$$

M. Z.

617 — Determine o volume do sólido compreendido entre os planos $x=0$ e $x=6$, limitado pela superficie gerada pela rotação em tôrno de OX da curva: $\begin{cases}(x-8)\,y^2=2x\,(x-6)\\ z=0.\end{cases}$

R: $V=\pi\int_0^6 y^2\,dx=2\pi\int_0^6\frac{x(x-6)}{x-8}dx=2\pi\int_0^6\left(x+2-\frac{16}{8-x}\right)dx=$
$=2\pi\left[x^2/2+2x+16\log(8-x)\right]_0^6=2\pi(18+12+16\log 2-16\log 8)=$
$=2\pi(30-16\log 4)$.

M. Z.

I. S. C. E. F. — 2.º Exame de freqüência, 17-6-1940.

618 — Determinar as curvas planas para as quais o raio de curvatura é inversamente proporcional à abcissa.

619 — Integrar a equação $y^{IV}+2k^2y''+k^4y=x^2+1$ (k constante).

620 — Determinar a evoluta e o raio de curvatura da curva $y=3e^{x/3}$.

621 — Determinar os máximos e mínimos da função $u=z-x-y$ sôbre a esfera $x^2+y^2+z^2=4$. R: *Trata-se dum problema de máximos e mínimos condicionados, fácil, de resto, de reduzir por eliminação a um problema de duas variáveis independentes.*

As soluções do sistema: $x^2+y^2+z^2=4$, $x-y=0$ *e* $x-z=0$ *dão-nos os pontos de estacionaridade da função* u *que são* $x=y=z=\pm 2/\sqrt{3}$. M. Z.

I. S. C. E. F. — 2.º Exame de freqüência, 24-6-1940

622 — Integrar a equação $2y\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\left[2+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]$.

623 — Escrever as equações do plano osculador e do plano normal da curva $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2+z^2=9. \end{cases}$

624 — Calcular o volume limitado pela superfície $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=2z$ e pelo plano $z=3$. R: *A superfície dada é um parabolóide elíptico tendo* OZ *por eixo e tangente na origem ao plano* $z=0$. *O volume é medido por* $V=\iint\limits_A (3-x^2/4-y^2/8)\,dxdy$, *sendo* A *a área limitada pela elipse* $x^2/12+y^2/24=1$, *projecção de* $x^2/2+y^2/4=2z$, $z=3$ *sôbre* OXY. *Façamos a mudança de variáveis* $x=2X$, $y=\sqrt{8}Y$; *atendendo a que* $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)}\right|=4\sqrt{2}$, *temos* $V=4\sqrt{2}\iint\limits_{A'}(3-X^2-Y^2)\,dXdY$, *sendo* A', *transformado de* A, *o círculo limitado por* $X^2+Y^2=3$; *introduzindo agora coordenadas polares, vem, finalmente,*

$$V=4\sqrt{2}\iint\limits_{A'}(3-\rho^2)\rho\, d\rho\, d\theta=4\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{3}}(3\rho-\rho^3)\,d\rho=18\sqrt{2}\pi.$$

M. Z.

625 — Mostrar que a equação homogénea $Pdx+Qdy=0$ admite o factor integrante $\lambda=\dfrac{1}{Px+Qy}$. R: *Por hipótese* $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *e* P *e* Q *homogéneas do mesmo grau; é preciso provar que* $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{P}{Px+Qy}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{Q}{Px+Qy}\right)$, *o que é fácil escrevendo as expressões destas derivadas e notando que é* $mP=\dfrac{\partial P}{\partial x}x+\dfrac{\partial P}{\partial y}y$ *e* $mQ=\dfrac{\partial Q}{\partial x}x+\dfrac{\partial Q}{\partial y}y$ *(teorema de Euler).* M. Z.

I. S. T. — 2º. exame de freqüência, 1940

626 — Integrar a equação $y''-7y'+10y=2\operatorname{sen}2x$. R: *Trata-se de integrar uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes com segundo membro. A equação homogénea correspondente* $y''-7y'+10y=0$ *tem por equação característica* $\alpha^2-7\alpha+10=0$ *de raízes* 2 *e* 5 *e admite, portanto, o integral geral* $C_1e^{2x}+C_2e^{5x}$. *Atendendo à forma especial do 2.º membro é possível determinar um integral particular da equação completa que, somado ao integral geral da homogénea dá o integral geral da equação dada. O integral particular é da forma* $Y=a\operatorname{sen}2x+b\cos 2x$ *e para determinar as constantes* a *e* b *basta substituir* Y, Y' *e* Y'' *na equação proposta e identificar. Obtem-se assim* $Y''-7Y'-10Y=(6a+14b)\operatorname{sen}2x+(6b-14a)\cos 2x=2\operatorname{sen}2x$, *e, identificando:* $6a+14b=2$, $3b-7a=0$, *donde* $a=3/58$, $b=7/58$.

O integral geral da equação dada é pois: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}+\dfrac{3}{58}\operatorname{sen}2x+\dfrac{7}{58}\cos 2x$. M. Z.

627 — Determinar as curvas planas para as quais a área do trapesóide limitado pela curva, pelo eixo dos xx e por duas ordenadas, é proporcional ao comprimento de arco limitado pelas mesmas ordenadas.

628 — Calcular o integral duplo $\iint\limits_A x\,dx\,dy$ sendo A a área limitada pelas rectas $y=0$, $y=x$ e $2x+y=2$. R: A *é a área limitada pelo triângulo de vértices* $(0,0)$, $(1,0)$ *e* $(2/3,2/3)$. *Tem-se:* $I=\iint\limits_A x\,dx\,dy=\int_0^{2/3}dy\int_y^{1-\frac{y}{2}}x\,dx=$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2/3}\left[\left(1-\frac{y}{2}\right)^2-y^2\right]dy=\frac{1}{2}\int_0^{2/3}\left(1-y-\frac{3}{4}y^2\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\left[y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{4}\right]_0^{2/3}=\frac{5}{27}.$$

A integração por outra ordem exige a decomposição de A *em* A_1 *e* A_2 *feita pela recta* $x=2/3$ *e tem-se neste caso:*

$$\iint\limits_{A_1}x\,dx\,dy=\int_0^{2/3}dx\int_0^x x\,dy=\int_0^{2/3}x^2\,dx=\frac{2^3}{3^4},\quad \iint\limits_{A_2}x\,dx\,dy=$$

$$=\int_{2/3}^1 dx\int_0^{2-2x}x\,dy=2\int_{2/3}^1(x-x^2)\,dx=\left[x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_{2/3}^1=\frac{7}{3^4}\quad \textit{donde}$$

$$I=\frac{2^3+7}{3^4}=\frac{5}{27}.$$

M. Z.

629 — Determinar os pontos de inflexão da curva $x^4-9x^2+27y=0$. R: *Tem-se* $y=-\dfrac{1}{27}(x^4-9x^2)$, $y'=-\dfrac{1}{27}(4x^3-18x)$, $y''=-\dfrac{1}{9}(4x^2-6)$, $y'''=-\dfrac{8}{9}x$. *A equação* $y''=0$ *ou* $2x^2-3=0$ *tem as raízes* $\pm\sqrt{6}/2$, *valores para os quais* $y'''_{\sqrt{6}/2}<0$ *e* $y'''_{-\sqrt{6}/2}>0$. *Os pontos* $(\sqrt{6}/2,5/12)$ *e* $(-\sqrt{6}/2,5/12)$ *são pontos de inflexão da curva dada.* M. Z.

I. S. T. — 2.º Exame de freqüência, 1940

630 — Determinar os pontos múltiplos da curva $x^4-2y^3-3y^2-2x^2+1=0$.

631 — Dada a curva $\begin{cases} y^2+z^2=4 \\ \operatorname{sen}x=\dfrac{y}{2} \end{cases}$ escrever as suas equações paramétricas em função do arco s e determinar as coordenadas do centro de curvatura no ponto $\left(\dfrac{\pi}{2},2,0\right)$.

632 — Determinar para a equação $p^2x-2py+4x=0$ o integral geral e as soluções singulares, se as houver.

633 — Determinar as curvas planas para as quais o comprimento de arco AD, contado a partir duma certa origem A, é proporcional ao coeficieute angular da tangente em P.

MECÂNICA RACIONAL

F. C. P. — 1.º Exame de freqüência, 1940

634 — Um ponto P descreve uma elipse de semi-eixos a e b de tal modo que se verifica a lei das áreas relativamente ao centro O da curva.

a) Calcular as componentes da aceleração de P segundo os eixos da trajectória em função das coordenadas cartesianas de P referidas a estes eixos.

b) Calcular o valor numérico desta aceleração quando P se encontra num dos vértices da curva sôbre o eixo menor. Dados numéricos: $a=4m$; $b=2m$; velocidade de P à sua passagem por uma das extremidades do eixo maior da elipse $v=30\,m/min$.

635 — É dada num plano π uma circunferência C de raio r e centro O. Uma régua AB assente em π está animada duma translacção uniforme rectilínea de velocidade V formando um ângulo de 60^o com AB. Supondo que são P e Q os pontos de intersecção de AB com C calcular:

c) As velocidades de P sôbre a circunferência e sôbre a régua AB no momento em que a distância de O a AB é $60\,cm$ $(r=1m$; $V=5\,cm/min)$.

d) A velocidade de aproximação (ou de afastamento) dos pontos P e Q no instante considerado.

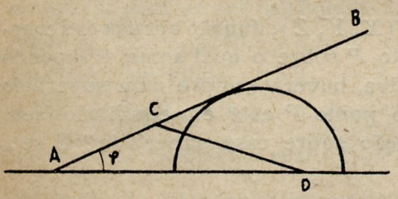
636 — Um disco circular C de raio r rola sem resvalar sôbre uma recta fixa Δ de modo que a velocidade do seu centro O neste movimento é V constante. Ao mesmo tempo o plano π do disco gira em volta de Δ com velocidade angular ω também constante.

e) Qual é o eixo do movimento helicoidal tangente ao movimento que resulta dos dois movimentos acima definidos e calcular o passo do movimento?

f) Qual é a superfície axoide móvel?

g) Quanto vale em função de V e de ω a aceleração do ponto A da periferia do disco diametralmente oposto ao ponto I de contacto de C com Δ?

637 — Duas barras rectilíneas AB, CD articuladas em C sôbre AB movem-se sôbre um plano π de tal modo que A e D percorrem uma recta Ox emquanto que AB se mantém constantemente tangente a uma circunferência de raio R centrada sôbre Ox.



h) Sabendo que a velocidade de A é $4\,m/min$ e que a sua aceleração é constantemente nula, traçar, para o instante em que AB forma um ângulo de 30^o com Ox, os diagramas das velocidades e das acelerações e deduzir dêles os valores da aceleração de D e da aceleração angular de CD.

Dados numéricos $AB=6m$; $CD=3m$; $AC=2m$; $R=2m$. (*Indicação*: para obter a direcção da aceleração de C procurar gràficamente a tangente ao hodógrafo do movimento dêste ponto pelo método exposto no curso para a cissoide).

638 — Em que casos existe num dado instante num sólido em movimento mais de um ponto sem aceleração.

Soluções:

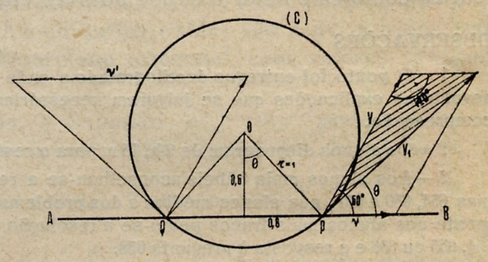
634 — *a) Equação da elipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. *Lei das áreas* $xy'-yx'=C$ *(movimento no sentido de* Ox *para* Oy $C>0)$.

Temos sucessivamente $\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=0$, $y'=-\frac{b^2x}{a^2y}x'$, $\left(-\frac{b^2x^2}{a^2y}-y\right)x'=C$, $x'=-\frac{Cy}{b^2}$, $y'=+\frac{Cx}{a^2}$; *donde* $x''=-\frac{C}{b^2}\cdot y'=-\frac{C^2}{a^2b^2}\cdot x$, $y''=-\frac{C^2}{a^2b^2}\cdot y$.

A aceleração (central) é proporcional à distância.

b) Para a posição considerada é $P(0,b)$ *logo* $x''=0$, $y''=-\frac{C^2}{a^2b^2}\cdot b=-\frac{C^2}{a^2b}$ (dimens. $\lambda\tau^{-2}$). *Mas* $C=a.v\,\mathrm{sen}(90^o)=120\,m^2/min$, *logo* $|a_P|=\left|\frac{120^2}{16\times 2}\right|=450\,m/min^2$.

635 — *c) Temos* $\binom{P}{AB}+\binom{AB}{C}=\binom{P}{C}$ *e as respectivas velocidades:* v *dirigida segundo* AB, V *dada e* V_1 *tangente a* C. *Como é* $\mathbf{V_1=V+v}$ V_1 *e* v *ficam determinadas, conhecida* V.

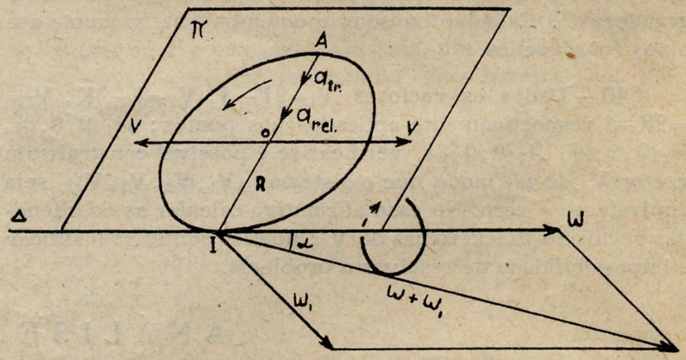


E da figura tira-se:

$$\frac{v}{\mathrm{sen}\,(60^o-\theta)}=\frac{V}{\mathrm{sen}\,\theta}=\frac{V_1}{\mathrm{sen}\,120^o}\quad \textit{donde:}\quad v=V\cdot\frac{\mathrm{sen}\,(60^o-\theta)}{\mathrm{sen}\,\theta}=$$

$$=5\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}6-\frac{1}{2}0{,}8}{0{,}8}=0{,}75\,cm/min;\quad V_1=V\cdot\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\mathrm{sen}\,120^o}=4\,cm/min.$$

d) A velocidade de afastamento de Q *e* P *é* $\mathbf{v'}-\mathbf{v}$, *isto é, tem para grandeza a* soma *das grandezas das velocidades* v' *e* v. *correspondentes à posição considerada.*



636 — *e) Como o ponto* I *tem velocidade nula nos dois movimentos considerados, o movimento resultante é tangente a uma rotação em volta do eixo* $\mathbf{w}+\mathbf{w}_1$ *onde* $\mathbf{w}_1$ *é normal a* π *e tem para grandeza* $\frac{V}{R}\cdot$ *O passo do movimento é portanto nulo.*

f) Por ser constante o ângulo α *e por* $\mathbf{w}+\mathbf{w}_1$, *se projectar ortogonalmente em* π *tangencialmente à circunferência que limita o disco, a superfície axoide móvel é um hiperboloide regrado de revolução.*

g) A aceleração de A *pode calcular-se pela aplicação do teorema de Coriolis. O movimento relativo será* $\begin{pmatrix} C \\ \pi \end{pmatrix}$, *o de transporte* $\begin{pmatrix} \pi \\ \text{Obs.} \end{pmatrix}$ *(rotação* $\mathbf{w}$*) e finalmente o movimento absoluto é o que resulta dêstes e aquêle para o qual se pretende conhecer a aceleração de* A.

Temos pois: $a_{rel}=R\omega_1^2=R\dfrac{V^2}{R^2}=\dfrac{V^2}{R}$ *(centro das acelerações em* O); $a_{tr}=2R\omega^2$, $a_{Cor}=2\omega\wedge\mathbf{v}_r=0$ *por* $\mathbf{v}_r$ *ter suporte paralelo ao de* ω *(rot. de transporte). Será então* $a_A=\dfrac{V^2}{R}+2R\omega^2$.

637 — *h)* Resolução a publicar no próximo número.

638 — *A resposta a esta pregunta encontra-se por exemplo em Gaston Julia «Cours de Cinématique de la Faculté des Sciences de Paris». págs. 44 e 45.* O assunto foi tratado na aula teórica como êste autor o expõe no livro citado.

OBSERVAÇÕES

1 — O ponto foi entregue dactilografado a cada aluno, dando-se em seguida as explicações que se julgaram necessárias para a sua perfeita compreensão.

2 — Os alunos dispuzeram de 2 h, 15 m para o resolver.

3 — Aos alunos mais hábeis aconselhou-se a resolução dos problemas 634, 636 e 637; aos alunos médios a dos problemas 634, 635 e 636; finalmente aos alunos mais fracos pediu-se a resolução de um dos problemas 634, 635 ou 636 e a resposta à pregunta 638.

4 — Embora durante as aulas práticas se procure incutir no espírito dos alunos a idéia de que o emprêgo dos métodos gráficos exige grande perfeição nos traçados, no exame, devido à escassez do tempo, consentiu-se que os alunos traçassem as perpendiculares à vista ou com o transferidor.

— Os problemas 634 a 638 e respectivas soluções foram-nos cedidos pelo Prof. Doutor Rodrigo Sarmento de Beires.

F. C. P. — Exercícios de revisão, Dezembro de 1938

639 — Sôbre a recta representada pelas equações $x-y+z=1$, $x+y-z=2$ está localizado um vector deslizante de grandeza 2. Calcular os seus momentos relativamente aos eixos coordenados.

640 — Dados os vectores $\mathbf{V}_1=2\mathbf{I}-\mathbf{J}$, $\mathbf{V}_2=\mathbf{J}-3\mathbf{K}$, $\mathbf{V}_3=2\mathbf{K}-\mathbf{I}$ respectivamente aplicados nos pontos: $A_1(2,0,0)$, $A_2(0,2,0)$, $A_3(0,0,3)$, verificar se é possível construir um vector $\mathbf{V}_4$ de tal modo que o sistema $(\mathbf{V}_1,\mathbf{V}_2,\mathbf{V}_3,\mathbf{V}_4)$ seja equivalente a zero. No caso afirmativo calcular as coordenadas vectoriais Pluckerianas de $\mathbf{V}_4$; no caso contrário justificar a impossibilidade de resolver o problema.

641 — Desenhar três vectores paralelos $\mathbf{V}_1,\mathbf{V}_2,\mathbf{V}_3$ de valores algébricos respectivamente iguais a $-1, 4, -3$ relativamente a um vector unitário $\mathbf{U}$. As distâncias dos suportes de $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ e de $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{V}_3$ são: 2 e 3 cm. Construir um funicular dêstes vectores e da forma do funicular deduzir se o sistema é particularmente reductível. Dizer, além disso, onde deveria ser aplicado o vector $\mathbf{V}_2$ para o sistema ser equivalente a zero. (Supõe-se que as posições dos vectores $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_3$ se conservam).

642 — Um sistema de vectores deslizantes tem para elementos de redução na origem das coordenadas os seguintes vectores: $\mathbf{V}=2\mathbf{I}-2\mathbf{J}$, $\mathfrak{M}_0=-\mathbf{I}+\mathbf{J}$. Escrever as equações do eixo central do sistema e determinar um torsor que lhe seja equivalente, escrevendo a equação do plano do binário e indicando a grandeza dos vectores que o formam e a sua distância.

643 — Dado um campo de momentos dizer se existe sempre algum ponto do espaço onde o vector momento seja paralelo a uma recta dada. Justificar a resposta.

644 — Dado um sistema de vectores deslizantes existirão sempre duas rectas conjugadas do sistema perpendiculares entre si? Justificar a resposta.

645 — Calcular a abscissa do centroide da área plana limitada pela sinusoide $y=\operatorname{sen} x$ e pela recta $y=\dfrac{3}{5\pi}x$, quando a função associada é $\mu=1$. Indicar também os limites do integral que é ainda necessário calcular para obter a ordenada do centroide considerado.

Os exercícios 639 a 645 foram-nos cedidos pelo Prof. Doutor Rodrigo Sarmento de Beires.

I. S. T. — 2.º exame de freqüência, 1940

646 — Dado o sistema material

$$m_1=2\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=2 \\ z_1=3 \end{cases} \qquad m_2=1\begin{cases} x_2=1 \\ y_2=-2 \\ z_2=2 \end{cases} \qquad m_3=4\begin{cases} x_3=-1 \\ y_3=2 \\ z_3=0 \end{cases}$$

escrever a equação do elipsoide de inércia em relação à origem e averiguar se algum dos eixos coordenados é eixo principal de inércia nalgum dos seus pontos.

647 — Dada a fôrça $F(X, Y, Z)$, função apenas das coordenadas (x, y, z) do ponto P sôbre o qual actua, e supondo que ela não é conservativa, haverá sempre uma superfície $f(x, y, z)=0$, tal que o ponto P está em equilíbrio (sem atrito) em qualquer posição sôbre essa superfície? E se a fôrça fôr conservativa?

648 — Determinar a lei de fôrças paralelas a Oy, sob cuja acção um fio flexível e inextensível toma, como figura de equilíbrio, a da curva $y=x^3+1$.

ANÁLISE SUPERIOR

F. C. L. — 2.º Exame de freqüência, 22 de Maio de 1940

649 — Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\,dz}{(z^4-2z^3+3z^2-4z+2)(z-3)}$ sendo γ uma circunferência de raio 2 e centro na origem.

650 — Determine o integral geral da equação $x^2y^2y''+2x^2yy'^2-xy^2y'-y^3=0$. (Diferencial exacta).

651 — Determine o integral geral da equação:

$$(2x-3)^3y'''+2(2x-3)^2y''+2(2x-3)y'-4y=3\cos[\log(2x-3)^2].$$