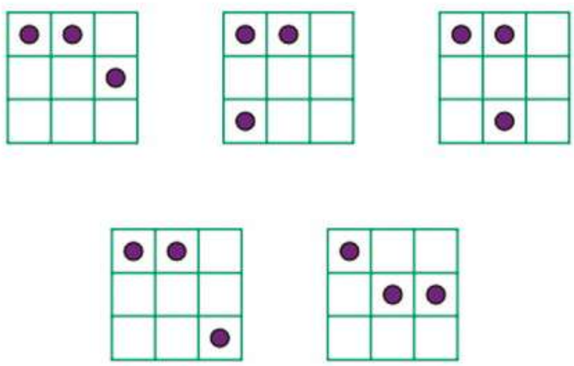
Jorge Nuno Silva
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

MATEMÁTICA E ASSUNTOS DIVERTIDOS II

O tabuleiro de xadrez, e algumas suas variantes, são palco de muitas questões matemáticas interessantes. A bibliografia deste tema é extensa e atraiu mesmo campeões mundiais do nobre *jogo-ciência*. Deixaremos para texto posterior a ilustração do uso do jogo do xadrez em si como ferramenta didática na nossa disciplina (há muito e recente trabalho na área). Vamos concentrar-nos no tabuleiro vazio. Hoje propomos um problema, que pode considerar-se um clássico, que constitui um bom desafio, mesmo para dimensões reduzidas.

Dado um tabuleiro 3×3, pretende-se colocar (3) peões em três casas distintas de forma a que as respetivas distâncias sejam todas diferentes. Assumimos que os peões se identificam com os centros das células do tabuleiro e que as distâncias são as euclidianas, medidas em linha reta.

A menos de simetrias, este problema tem cinco soluções, aqui ilustradas.



Agora, perguntamos ao leitor: e se tivermos um tabuleiro 4×4 e quatro peões para colocar? E se for 5?

Para que valores de n é que é possível colocar n peões num tabuleiro $n \times n$ gerando distâncias todas diferentes?

Sobre as questões do número anterior:

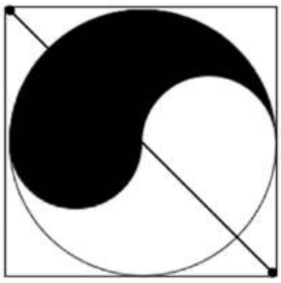
- A soma dos 10 primeiros termos de uma sucessão de Fibonacci (f_n) é sempre igual a $11 f_7$. Assim, ao Mágico basta pedir o valor de f_7.

- A bissecção do triângulo equilátero de lado a é discutida no capítulo x da obra de Polya *Mathematics and plausible reasoning*. A linha procurada é um arco da circunferência centrada num vértice, de raio r, em que

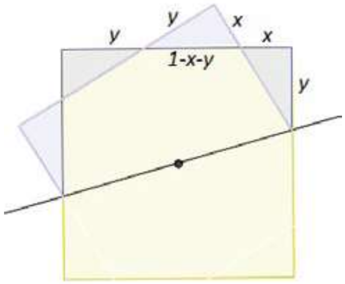
$$\frac{\pi r^2}{6} = \frac{\sqrt{3}a^2}{8},$$

(ver *https://www.cut-the-knot.org/proofs/bisect.shtml/#solution*).

- A diagonal do quadrado ilustrada bissecta as duas áreas do símbolo (ver o problema 5.14 do livro de Gardner *The colossal book of short puzzles and problems*).



- A dobragem do quadrado ótima está ilustrada abaixo (o declive da reta que a define é de 22,5º)



(ver *https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/GeoGebra/TwoSquares.shtml/#solution*)

- Consideremos que cada aresta do grafo K_8 tem um rótulo, dado pela soma-NIM dos valores dos vértices (o 8 entende-se como sendo zero). O Ajudante, após o primeiro movimento do Voluntário, vai somando-NIM os valores das arestas percorridas. No fim, o valor que tiver (que vai ser o seu palpite), quando somado-NIM ao declarado pelo Voluntário, produz o da carta-mistério. No exemplo dado, o palpite do Voluntário é $5 \oplus 7 \oplus 3 \oplus 7 \oplus 4 = 2$. Note-se que $2 \oplus 3 = 1$, $2 \oplus 1 = 3$ e estas são as posições inicial e final do Voluntário.