Alexander Kovačec
Universidade de Coimbra
kovacec@mat.uc.pt

SOBRE A FORMALIZAÇÃO DE FRASES EM LINGUAGEM NATURAL

O que se pode dizer pode dizer-se de forma clara...

O currículo de Matemática A para o 10.º ano (ver [BGLOT]) prevê a Lógica como um dos tópicos. Complementamos as considerações no respetivo caderno de apoio no que diz respeito à formalização de afirmações não-matemáticas feitas em linguagem natural.

1 Consideramos a seguir conhecidas pelo leitor as tradicionais tabelas de verdade que, por uma questão de referência e completude, colocamos aqui:

A	¬A
·	1
1	·

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \to B$
·	·	·	·	1
·	1	1	·	1
1	·	1	·	·
1	1	1	1	1

Identificando 0 (o ·) como 'falso' e 1 como 'verdadeiro', a primeira tabela diz que a negação de uma afirmação A, $\neg A$, é verdadeira se e só se (sse) a afirmação A for falsa, a tabela para $A \vee B$ diz que se de duas afirmações A, B se constrói a afirmação-disjunção 'A ou B', esta é verdadeira sse pelo menos uma destas for verdadeira, a afirmação-conjunção 'A e B', $A \wedge B$, é verdadeira sse ambas as afirmações A, B forem verdadeiras; e o único caso em que 'A implica B', $A \to B$, é falso é quando A é verdadeiro e B é falso. Igualmente supomos conhecida a construção de fórmulas bem formadas da Lógica Proposicional bem como a construção de tabelas de verdade de fórmulas mais complexas. Este material encontra-se, por exemplo, em [FdO], um livro que se sugere a todo o leitor português interessado em Lógica.

Os enunciados de teoremas, proposições e lemas da própria matemática são tipicamente feitos em linguagem informal. O facto de que aí não há quase nunca problemas quanto à interpretação prende-se parcialmente com a sua muito restrita 'fraseologia': não se usam locuções como 'A mas B', 'A a não ser que B', etc.; mas quase exclusivamente locuções cujas formalizações são consagradas pelas tabelas acima.

Ora, alguns livros de lógica e manuais escolares pedem ao leitor que formalize frases não-matemáticas feitas em linguagem natural. Assim, por exemplo, o mencionado caderno pede para formalizar a frase

'O Carlos não sai de casa quando está a chover, a não ser que tenha aulas.'

Tecemos aqui algumas considerações sobre a questão de formalizar tais frases. Existem, aliás, outros livros de lógica que, por causa das controvérsias que podem ser provocadas por formalizações de tais frases, explicitamente evitam tocar neste assunto; veja-se e.g. [CL, p. 24]. Se o assunto fosse direto e simples para frases de complexidade ligeiramente elevada, se calhar não haveria tanta literatura sobre o assunto. Uma pesquisa Google com a procura '*Formalization of phrases in natural languages*' revelou há uns anos 236.000 registos. De entre os muitos textos que abrimos não encontrámos nenhum que pudesse esclarecer o leitor não-especialista em tempo limitado sobre alguns dos espinhosos assuntos deste tópico na fronteira entre filosofia e lógica matemática. Também os livros que conhecemos não se alargam muito sobre o tópico da formalização de frases naturais, se bem que peçam formalizações nos exercícios.

O ensaio [BL] parece-nos filosoficamente profundo e diz na página 2: 'Em resumo, a tarefa de conceber um procedimento efetivo que ligue linguagens naturais e a lógica de primeira ordem não está sequer perto de ser completado [...]; e até se pode duvidar se tal jamais será possível'. Parece-nos que o mesmo pode ser dito para frases naturais isentas de quantificadores como 'existe' e 'para todos'.

A nossa tarefa é modesta: vamos discutir, para várias locuções, formalizações que essas sugerem e esperamos que o leitor ache as propostas aceitáveis e que ache as discussões e os métodos que levaram a elas úteis para tratar dos seus próprios exemplos.

2.
A linguagem natural escrita não tem parênteses; e ainda menos do que na linguagem falada é claro como incluir parênteses numa formalização. Consideremos as frases

a. vou ao parque e colecionar folhas para o meu herbário ou ver os pássaros,

b. vou ao parque e colecionar folhas para meu o herbário ou beber uma pinga na tasca.

Com as abreviaturas $a :=$ vou ao parque, $b :=$ colecionar folhas para o meu herbário, $c :=$ ver pássaros, $c' :=$ beber uma pinga na tasca, uma fórmula natural para a primeira frase é $a \wedge (b \vee c)$, pois nos parques se encontram tanto muitas folhas como pássaros; uma formalização para a frase b será $(a \wedge b) \vee c'$. É fácil ver que estas duas formalizações não são equivalentes (têm tabelas diferentes). Não está de todo excluído que na frase b o locutor teve em mente a formalização $a \wedge (b \vee c')$, mas o destinatário não pôde contar com que no parque houvesse uma tasca... Um lindo exemplo de como podem acontecer desentendimentos...

3.
Podemos multiplicar exemplos de ambiguidades do tipo anterior: obtemos uma indicação de que frases naturais com a mesma estrutura sintática podem ter, por razões de diferentes significados (semânticas), formalizações e tabelas diferentes. E até a mesma frase pode admitir tabelas diferentes.

Além de exercícios cuja formalização é imediata através das tradicionais tabelas, encontramos em manuais de lógica exercícios com frases de estrutura 'A mas B', 'A porque B', 'A exclui B', etc., onde A e B são frases em linguagem natural. O autor não conhece nenhum livro no qual sejam propostas tabelas de verdade para estas junções verbais, mas vai tentar fundamentar as propostas a seguir. Um guião aqui, e nos exemplos mais complexos abaixo, é o seguinte: dada a frase, examinem-se as quatro combinações possíveis dos valores (A,B). Dê-se o valor 1 a determinada combinação se se considerar que a frase permite esta combinação particular de valores de verdade; se não, dê-se-lhe o valor 0. Como veremos, esta escolha não será sempre unânime. Levaria a discussões infindáveis convencer de uma ou de outra escolha para obter tabelas definitivas.

Eis então uma proposta fundamentada para uma tabela para 'A mas B':

A	mas	B
·	·	·
·	·	1
1	·	·
1	1	1

É condição necessária para esta frase ser considerada verdadeira que B seja verdadeiro. Se $A = 0$, $B = 1$, não podemos dar 1 à frase, pois ela diz também que A acontece.

Por exemplo, quem diz 'o sismo foi forte, mas os prédios resistiram' não tem razão se não tiver havido um sismo forte. Igualmente, não podemos dar valor 1 à frase 'o sismo foi forte, mas os prédios não resistiram'. Assim, uma tabela para 'A mas B' é a tabela de $A \wedge B$. Frequentemente ouve-se a frase na forma 'não A, mas B', expressando um contraste como em: 'A Joana não é muito trabalhadora mas é inteligente'; 'as dívidas não são baixas, mas a economia cresce'. E, de facto, consideraremos neste caso a frase verdadeira exatamente quando 'não A' e 'B' forem ambas verdadeiras.

A	excl.	B
·	1	·
·	1	1
1	1	·
1	·	1

Uma pessoa que diz 'A exclui B' é refutada com certeza se A e B ambas acontecerem, i.e., ambas tiverem o valor 1. A afirmação não é refutável se A não se dá. Chegamos à conclusão de que a frase diz o mesmo que A implica não B. Daí que tem entre as formalizações possíveis as seguintes equivalentes: $A \to \neg B$, $\neg A \vee \neg B$, $B \to \neg A$.

A	enq.	B
·	1	·
·	·	1
1	1?	·
1	1	1

Uma locução 'A enquanto B' diz em particular que, se B acontece, então A acontece. Isto explica as linhas 2 e 4 da tabela. Que, se B não acontecer, A não acontece, está também perfeitamente de acordo com a locução. Logo, temos o 1 na linha 1. A questão é se a frase admite que A aconteça se B não acontecer. Em frases como 'Temos luz suficiente para ler enquanto o Sol anda no céu' temos de admitir que podemos ler mesmo sem sol no céu, usando iluminação artificial. A frase interpretada desta maneira tem a tabela de $A \leftarrow B$. Mas numa frase como 'Os passarinhos voam enquanto a Terra tem atmosfera', o orador quer ser certamente interpretado como dizendo 'sse' e nós teríamos um 0 na linha 3. Neste caso, a frase tem a tabela de $A \leftrightarrow B$.

'A só se B': Será consensual que a tabela desta frase receba os valores 1 se A e B ambos acontecerem ou ambos não acontecerem; i.e., nos casos $A = B = 1$, $A = B = 0$. Mas se $A = 1$, $B = 0$, deve receber o valor 0, pois A não devia acontecer enquanto B não acontecer. Fica o caso $A = 0$, $B = 1$. Quem dá aqui o valor 0 à frase entende que *se* B acontecer, então A deve acontecer. A frase tem neste caso a tabela da equivalência lógica. Penso que na maior parte dos usos desta frase, a tabela da equivalência lógica $A \leftrightarrow B$ traduz o significado de 'A só se B'. Mas podemos ver exemplos em que o locutor desta frase quer dizer provavelmente outra coisa: a atual doutrina económica mantém (sobretudo em discussões acesas) que 'a pobreza desaparece só se houver crescimento económico'.

A	só se	B
·	1	·
·	0?	1
1	0	·
1	1	1

Será que podemos estar tão seguros disto? Não será que os defensores da frase antes apenas acreditam em 'Enquanto não há crescimento económico, a pobreza não desaparece'; uma frase que se formaliza por $\neg B \to \neg A$ ou $A \to B$, i.e., 'B é necessária para A'? A ambiguidade do A só se B é uma boa razão para que na matemática se prefira a locução 'se e só se' para dizer a equivalência.

'A a não ser que B': Será consensual que, para dar valor 1 a esta frase, quando B não acontece, então A deve acontecer. Isto explica as linhas 1 e 3 da tabela. A frase também admite, ou mesmo sugere, que quando B acontece, A não acontece. Isto explica a linha 2. A questão é se a frase quer mesmo excluir A se B acontecer. Em livros e exercícios de lógica, provavelmente que sim, daí o 0 da linha 4, mas numa conversa isto é menos claro, daí o '?':

A	a nsq	B
·	·	·
·	1	1
1	1	·
1	0?	1

Um aluno pode dizer 'Eu vou chumbar, a não ser que tenha feito bem o quarto problema do teste', e expressar sérias dúvidas. Por causa destas dúvidas, se o aluno chumbar apesar de ter feito bem o quarto problema do teste, seria talvez inadequado considerar a sua auto-avaliação como falsa. Assim, a tabela para o 'a não ser que' mostrada é a de um ou exclusivo ('$\dot\vee$') e sua alternativa, a de um ou simples ($\vee$).

4.

Chegamos finalmente à tabela da implicação material $A \to B$. Ao contrário das nossas próprias tabelas, esta é consagrada. É usada muito na ciência e, enquanto não se encontrar nenhuma séria deficiência neste contexto, não temos escolha senão a de a justificar.

A	$\rightarrow$	B
·	1	·
·	1	1
1	0	·
1	1	1

Rios de tinta correram sobre a justificação da coluna $A \rightarrow B$; veja-se, por exemplo, [F]. Quando exatamente é que uma frase 'se A então B' deve ser considerada verdadeira? Assim dedicamos uma secção especial à sua tabela, que aqui repetimos.

Incontroversa é aqui a terceira linha: alguém que diz 'se A, então B' é refutado se A acontecer, mas B não: a afirmação 'se A, então B' é falsa se A acontecer, mas B não. Relativamente às outras linhas, vários argumentos foram avançados para as justificar. Estas linhas precisam realmente de alguma justificação, pois poucos vão sentir-se confortáveis com o facto de que as frases

'Se a Lua é feita de queijo verde, então a relva é azul';
'Se a Lua é feita de queijo verde, então a relva é verde';
'Se a Lua é feita de pedra, então a relva é verde',

que dizem respeito à primeira, à segunda e à quarta linhas da tabela todas têm valor 'verdadeiro'. A primeira e a segunda frases até parecem contradizer-se.

A primeira reação a tais observações será que talvez devamos dar às frases com falso antecedente o valor 0 (falso) ou então deixar o valor indefinido; e defini-lo como verdadeiro só se puder ser estabelecido por experiência ou prova de que existe 'um nexo' entre A e B que faz com que sempre que $A = 1$, então também $B = 1$. Para já, isto tem o inconveniente de nos obrigar a definir o que 'um nexo' é. Antes de 1820, quando o físico dinamarquês J. C. Oersted a descobriu, a afirmação 'se se faz correr eletricidade num fio, então a agulha duma bússola perto do fio mexe-se' teria parecido um disparate. Assim, quem defende uma tabela em função do nexo, defende uma tabela em dependência do tempo. Esta possibilidade é para a esmagadora maioria dos matemáticos tão pouco satisfatória como deixar os valores em aberto em casos sem nexo evidente. É um pouco como dizer que nem a hipótese da existência de infinitos primos gémeos é verdadeira nem o seu contrário; e só depois de ela ser porventura estabelecida, dar significado à frase 'existem infinitos primos gémeos'. (Diga-se de passagem que a corrente de lógica chamada Intuicionismo defende ideias deste género.)

Se queremos definir a tabela de $A \rightarrow B$ como verofuncional (i.e., dependente apenas dos valores de verdade de A e B), não temos outra possibilidade do que fazer no caso $A = 1$, $B = 1$, também $(A \rightarrow B) = 1$. Sentimo-nos desconfortáveis com a tabela do $A \rightarrow B$ por várias outras razões:

a. O pai que diz 'Se continuas a gritar, dou-te uma bofetada' e dá uma bofetada ao seu filho apesar de ele se já ter calado, tem do ponto de vista da tabela do condicional ('$\rightarrow$') um comportamento impecável. Isto repugna-nos: um pai merecendo a designação de educador devia agir no pior dos casos segundo 'Dou-te uma bofetada se e só se continuas a gritar' (e, portanto, também falar neste sentido). Como alternativa, podia dizer 'Ou te calas ou dou-te uma bofetada'. Notem que o 'ou ... ou ...' é um ou exclusivo e devia ser sempre usado apenas neste sentido.

   Outro tal exemplo é dizer 'Se está frio, visto uma camisola'. Digo isto porque (quase) sempre que está frio, visto uma camisola; mas a frase não reflete que (quase) nunca visto uma camisola se não está frio. A frase admite que ando com a camisola nos dias quentes do verão mas mais informativo seria dizer 'Visto uma camisola se e só se está frio' ou 'Ou está quente ou visto uma camisola'.

b. O modo como as definições são expressas, mesmo em matemática, também não contribui para aliviar o desconforto com a tabela da implicação. Por exemplo, define-se: 'Um triângulo diz-se equilátero se tem três lados iguais', onde na verdade devíamos dizer '... se e só se ...' no lugar do 'se'. O 'se' simples podia levantar dúvidas sobre se existem triângulos equiláteros que não têm três lados iguais. Aos estudantes de matemática diremos então que em definições um se simples deve ser entendido como um 'se e só se' ou seja um 'sse'. De facto, esta será uma das razões por que as definições são formalmente introduzidas frequentemente com a palavra 'Definição'; outras vezes por palavras destacadas. Na verdade, as definições podem ser posteriormente usadas como caracterizações. Num teorema que enuncia uma caracterização como 'Um triângulo é equilátero se e só se tiver três triângulos iguais' já se usa o 'se e só se' corretamente.

c. Ainda outro uso do 'se ... então ...' faz-se na frase, 'Se tens pressa, então há uma bicicleta na garagem'. A tabela desta afirmação seria simplesmente a da existência de uma bicicleta na garagem. A contraposição logicamente equivalente diz 'Se não há bicicleta na garagem, então não tens pressa'... O locutor desta frase não a entende como afirmação científica e sente que é refutado só se não houver bicicleta na garagem.

Vemos que a nossa linguagem natural está contaminada com usos, no mínimo, enganadores da construção 'se ..., então ...' – não é de admirar que nos sintamos pouco à vontade a proceder com a sua formalização segundo a consagrada tabela de verdade.

No entanto, o 'Se ..., então ...' tem o seu lugar, como a seguir veremos.

d. Um bom argumento para manter a tabela tradicional da implicação é o uso da mesma em frases quantificadas. Por exemplo, a frase 'Se n é primo ≥ 3, então n é ímpar', escrita como sentença lógica, adquire com a introdução da fórmula

$$\text{P(n)} := (\text{n primo \& n} \geq 3) \rightarrow (n \equiv_2 1),$$

a forma $\forall n P(n)$. Ora, para considerar esta sentença correta devemos ter $P(n)$ correto, para todo o n, incluindo os casos $n = 6, 8, ...$ em que tanto a premissa como a conclusão são falsas.

Note-se que uma fórmula da forma $\forall x P(x)$ sobre um universo finito de quantificação, digamos $\{1, 2, ..., n\}$, pode ser escrita como conjunção: $P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(n)$ e, como tal, é verdade se cada uma das fórmulas $P(i)$ for verdadeira.

e. Talvez a única coisa que deve realmente preocupar-nos é se pelo uso da tabela verofuncional escolhida pode introduzir-se algum erro grave num argumento científico. Um argumento é uma sucessão de afirmações $\phi_1, ..., \phi_k$, chamadas premissas, seguida de uma afirmação ψ, dita conclusão. A questão da validade de um argumento é a questão de saber se, supondo $\phi_1, ..., \phi_k$ verdadeiros, ψ é necessariamente verdadeiro.

Ora, na prática científica, usa-se $A \rightarrow B$ para concluir B apenas se A for satisfeito: por *modus ponens*. Enquanto A = 0, a afirmação $A \rightarrow B$ é estéril e não será usada. A afirmação também é estéril se se souber $B = 1$ por outros meios. E se se souber A mas não se souber B, faz-se uso de $A \rightarrow B$ apenas depois de esta implicação ter sido estabelecida por outros meios – usualmente, um argumento ou uma experiência científica que estabeleça um nexo lógico entre A e B que permite convencer-se de B. A frase não é usada só porque alguém a diz. Uma frase tal como 'Se a Lua é feita de pedra, então a relva é azul' não é usada em ciência enquanto não há fundamentação para ela; e 'Se a Lua é feita de pedra, então a relva é verde' é verdadeira (apesar de não fundamentada), mas isto porque já se sabia sem ela que a relva é verde. Como ferramenta de inferência, a frase é estéril.

f. Finalmente, as tabelas alternativas que podiam eventualmente ser usadas para $\rightarrow$ resultam num conetivo diferente. Vejamos: a tabela para $\rightarrow_2$ é igual à do consequente; a tabela da 'implicação' $\rightarrow_3$ é a da equivalência, a tabela do $\rightarrow_4$ é a da conjunção.

A	B	$A \rightarrow B$	$A \rightarrow_2 B$	$A \rightarrow_3 B$	$A \rightarrow_4 B$
·	·	1	·	1	·
·	1	1	1	·	·
1	·	·	·	·	·
1	1	1	1	1	1

5.

Com a experiência adquirida, podemos agora tentar formalizações de frases mais complexas. Como formalizar a frase da secção 2 'O Carlos não sai de casa quando está a chover a não ser que tenha aulas'?

Se se aplicar 'quando' (como 'enquanto') e 'a não ser que' referido na secção 3, obtém-se (com abreviaturas que se entendem) a formalização direta $(\text{c} \rightarrow \neg\text{s})\dot{\vee}\text{t}$. Se se fizer uma tabela de verdade desta fórmula, obtém-se na ordenação binária dos ternos (c, s, t) (ver abaixo) a coluna $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)^T$. Esta coluna diz-nos que a fórmula não permite nos casos $(c, s, t) = (0, *, 1)$, correspondentes às linhas 2 e 4, o valor verdadeiro. Em particular, se não chover e o Carlos tem aulas nem sair nem não sair dá o valor 1. Isto não reflete o que a frase quer dizer; pois ela admite de certeza que o Carlos sai quando não chove.

Se se substituir o $\dot{\vee}$ por um $\vee$ simples, obtém-se a coluna $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1)^T$; portanto, a frase do orador permite todos os cenários exceto $(c, s, t) = (1, 1, 0)$. A frase exclui apenas que chova e o Carlos saia, embora não tenha aulas. Uma fórmula mais simples do que a original para dizer isto é $\neg(c \wedge s \wedge \neg t)$ ou equivalentemente $\neg c \vee \neg s \vee t$.

A segunda das formalizações acima tem '1's adicionais nas linhas 2, 4, 6, dizendo respeito aos casos $(c, s, t) \in \{(0,0,1), (0,1,1), (1,0,1)\}$. i.e., a fórmula permite que o Carlos quando tem aulas não saia, independentemente do tempo que faz. Se o locutor falar de um aluno preguiçoso, a tabela dada pode bem refletir o comportamento desse aluno e, portanto, aquilo que a frase quer dizer.

Mas esta formalização não serve para refletir o comportamento de um aluno assíduo que detesta a chuva: admite não chover, o aluno não sair, e ter aulas como eventos simultâneos.

Antes, a frase diz-nos que, apesar do seu desgosto pela chuva, se há aulas, o Carlos sai. Portanto, se não chover, tanto mais o aluno vai sair.

c	s	t	F
·	·	·	1
·	·	1	0
·	1	·	1
·	1	1	1
1	·	·	1
1	·	1	0
1	1	·	0
1	1	1	1

Mas então como é que chegamos a uma formalização que reflita o espírito da frase no caso de um aluno aplicado? Uma solução possível é: consideramos todos os oito casos de (c, s, t) possíveis e damos à fórmula a construir o valor 0 ou 1 conforme acharmos que a frase não permite ou permite o cenário (i.é. e tendo (c, s, t)) em consideração. Partindo desta tabela, construímos a fórmula pelo método da forma normal disjuntiva e subsequentes simplificações.

Já dissemos que o nosso aplicado aluno, faça chuva, faça sol, sempre sai caso tenha aulas. A fórmula deve portanto dar nas linhas onde $t = 1$, o valor 1 se $s = 1$; e 0 se s tem valor 0. Isto dá os valores de F nas linhas 2,4,6,8. Mais diz-nos o locutor que quando chove e não há aula, i.e., $c = 1$, $t = 0$, o Carlos não sai. Isto dá-nos os valores nas linhas 5, 7. Finalmente, o locutor não diz nada sobre o que o Carlos faz se 'não chover' e 'não ter aulas' acontecerem em simultâneo. Ele não proíbe nem sair nem ficar em casa. Se não proibir, não pode ser refutado. Por isso, os valores das linhas 1 e 3 são 1s. A esta tabela aplicamos o algoritmo da forma normal disjuntiva; ver, por exemplo, [FdO, p.86-88]. Usemos a notação de polinómios booleanos (em vez de $\wedge$, multiplicação, em vez de $\vee$, adição, em vez de $\neg a$, $\bar{a}$). Para cada linha onde F tem o valor 1, constrói-se um produto (um monómio) nos literais $c, s, t, \bar{c}, \bar{s}, \bar{t}$ que assume o valor 1 apenas nesta sua linha. Depois somem-se estes monómios. Obtém-se um polinómio booleano. Simplifique-se finalmente este polinómio usando as conhecidas regras da álgebra booleana: assim obtemos

$\bar{c}\bar{s}\bar{t} + \bar{c}s\bar{t} + \bar{c}st + c\bar{s}\bar{t} + cst = \bar{c}\bar{t} + st + c\bar{s}\bar{t} = \bar{c}\bar{t} + st + \bar{s}\bar{t}$.'

O primeiro polinómio booleano adiciona os produtos segundo a ordem das linhas com $F = 1$, depois aplicamos distributividade e a regra $\bar{s} + s = 1$ aos termos 1 e 2 da soma, e usamos de forma análoga $c + \bar{c} = 1$ para simplificar a soma dos termos 3 e 5. Finalmente use-se que $\bar{c} + c\bar{s} = \bar{c} + \bar{s}$. Esta é então, no caso de um aluno aplicado, possivelmente a formalização mais fiel ao espírito da frase. Ela difere da formalização que expressamos com o ou exclusivo apenas na linha 4, onde $(c, s, t) = (0, 1, 1)$ onde agora temos $F = 1$, (pois frisa que se não chove e há aulas, o Carlos sai), mas antes tínhamos $F = 0$.

Em alternativa à construção de um polinómio booleano podia retificar-se face à presente tabela a primeira formalização com um um termo adicional, por exemplo, $((c \to \neg s)\dot{\vee} t) \vee (\neg c \wedge s \wedge t)$.

7.

No âmbito da análise de conjuntos de afirmações relativamente à sua consistência interna (ausência de contradições), a formalização é importante porque, uma vez feita, concentra a mente no estritamente necessário, tal como a álgebra e a aritmética simbólicas fazem com problemas em que entram números. Segundo [Pf] os egípcios, por volta de 1600 a.C., foram quase incapazes de determinar o número que somado a um quinto de si próprio dá 21 – simplesmente porque não tiveram formalismo.

Vejamos como a lógica simbólica pode ser útil num discurso científico. O autor, há tempos, colocou o seguinte problema aos seus alunos.

Problema: Um grupo de paleoantropólogos P2 a P7, liderado pelo paleoantropólogo-mor, Pm, discute os últimos dados recolhidos sobre o *homo glaciaris*:

Pm: 'Colegas: acho que concordamos que o *homo glaciaris* construiu ferramentas ou porque o volume do seu cérebro aumentou ou o seu cérebro aumentou porque construiu instrumentos.

P2:'... Pois, mas construir instrumentos significa viver com pedras e madeira.'

P3: 'Ah, meu caro, quem vive no gelo com certeza não tem madeira disponível!'

P4: 'Certo, mas mesmo na época glaciar houve duas possibilidades: ou se vive no gelo ou se vive no sul.

P5: 'Bom, uma coisa é certa: o hominídeo encontrado usou peles grossas. Quem usa tais peles vive obviamente no gelo.'

P6: 'E, aliás, nenhum fóssil desta espécie jamais foi encontrado no sul.'

P7: 'E também sabemos que com o tempo usou chapéus cada vez maiores.'

P8: '... o que para mim equivale a que o volume do cérebro aumentou (pois com um chapéu grande num crânio pequeno teria frio).'

Pm: 'Mmm, muito certeiras as vossas observações. Tanto quanto vejo, chegamos à surpreendente conclusão de que o desenvolvimento cerebral é possível mesmo sem ser fomentado pela construção de instrumentos.'

Decida se a conclusão do paleoantropólogo-mor é admitida ou mesmo forçada pelas outras afirmações.

□

Para resolver a questão, vamos formalizar as afirmações. Com siglas facilmente identificáveis podemos escrevé-las desta forma:

Pma:	(cferr $\leftarrow$ volcerau)	$\dot\vee$	(cferr $\rightarrow$ volcerau)
P2:	cferr	$\rightarrow$	vivpedmad
P3:	vivnogelo	$\rightarrow$	$\neg$ vivpedmad
P4:	vivnogelo	$\dot\vee$	vivnosul
P5a:	uspeles		
P5b:	uspeles	$\rightarrow$	vivnogelo
P6:	$\neg$ vivnosul		
P7:	chapmai		
P8:	chapmai	$\leftrightarrow$	volcerau
--	--		
Pmb:	volcerau	$\wedge$	$\neg$ cferr

Solução: A questão da consistência destas afirmações é a questão de se todas estas as afirmações podem ter em simultâneo o valor 1. A questão da correção do argumento é a questão de se premissas Pma,P2,...,P7,P8 verdadeiras implicam a veracidade de Pmb. Supondo as premissas verdadeiras, temos por P7 e P8 volcerau=1 e por P6 vivnosul=0. Agora P4 implica vivnogelo=1 o que dá por 3 vivpedmad=0, o que força cferr=0 por P2. Com isto é claro da tabela do $\dot\vee$ que Pma tem valor 1 e também que Pmb=1. Esta discussão mostra que as afirmações são consistentes e que o argumento (no sentido da secção 4e) é correto .

□

Conclusão:

Esperamos ter mostrado que a formalização de frases em linguagem natural de afirmações do dia-a-dia usando conetivos verofuncionais (apenas dependente dos valores de verdade dos constituintes) é muito problemática e se calhar foi uma das razões por que o sonho de G.F.W. Leibniz (1646-1716) da criação de um formalismo através do qual se pudessem resolver contenciosos políticos e filosóficos por mero cálculo não se mostrou realizável. Quem ambiciona propor uma teoria que não seja mal-interpretada mesmo pelos seus adversários não tem outra escolha senão a aplicação de uma linguagem muito precisa e técnica; certamente algo enfadonha. Muito mais com certeza foi dito sobre o lado filosófico destas questões por A. Tarski nas suas investigações sobre a noção da verdade; e K. Popper nas suas investigações sobre a lógica da descoberta científica. O tema é, aliás, entre nós discutido no livro de H. Jales Ribeiro [JR] que dedica todo o capítulo 3 a Popper. A lógica simbólica na filosofia ou no dia-a-dia tem o seu lugar certamente para explicar ou tornar os argumentos mais claros. Quem não diz coisa suficientemente clara num assunto importante pode ser obrigado, no extremo, a formalizar o que quer dizer. Depois a sua teoria pode ser testável e ser um potencialmente valioso contributo para a ciência – mas encontramos os sucessos maiores da lógica simbólica proposicional, por exemplo, na construção de circuitos lógicos (como existem nas unidades de processamento central dos computadores), na teoria da complexidade computacional (o problema SAT da satisfatoriedade de fórmulas proposicionais está intimamente ligado ao famoso problema $P = NP$), e, sim, na análise da consistência de regras muito bem definidas (e claras) de regulamentos em linguagem natural (de tipo legístico). [Pf], por exemplo, descreve o uso da lógica simbólica numa companhia de seguros. Além disto existem os já tradicionais usos intramatemáticos na teoria das demonstrações. Veja-se, por exemplo, [ER].

... e do que não podemos falar, devemos calar-nos. (Wittgenstein)

REFERÊNCIAS

[ER] R. M. Exner, M. F. Rosskopf, *Logic in Elementary Mathematics*, McGraw Hill, 1959.

[F] J. S. Fulda, "Material Implication Revisited", *Amer. Math. Monthly* 96,3(Mar. 1989), 247-250.

[BL] M. Baumgartner, T. Lampert, "Adequate Formalization", *Synthese* 164, 1, 93-115, 2008. (encontrado numa procura *web* em novembro de 2014)

[CL] R. Cori, D. Lascar, *Mathematical Logic: a course with exercises*, Oxford 2000.

[JR] H. Jales Ribeiro, *Retórica, Argumentação e Filosofia*, Minerva Coimbra, 2016

[Pf] J. Pfeiffer, "Symbolic Logic", *Scientific American* 1950, reimpresso em: *Mathematics in the Modern World*, (M. Kline ed.) W. H. Freeman& Company, 1968

[BGOLT] A. Bivar, C. Grosso, F. Oliveira, L. Loura, M. C. Timóteo. *Metas Curriculares para o Ensino Secundário - Matemática A, Caderno de Apoio 10.º Ano*, Governo de Portugal, Ministério da Educação e Ciência.

[FdO] A. F. de Oliveira, *Lógica e Aritmética*, Gradiva 1996.