Livros contados

Paulo Ventura Araújo

Fundamentos da Geometria,

de José Joaquim Dionísio (colecção *Textos de Matemática*, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2004)
recensão crítica por Paulo Ventura Araújo, Universidade do Porto

As edições universitárias são, em Portugal mais do que noutros países de mercado editorial mais diversificado, um modo de publicar textos em que as editoras convencionais dificilmente apostariam. Além de visarem um público restrito, as edições técnicas ou científicas têm as vendas prejudicadas pela *fotocopilhagem* que grassa nas universidades; e, se ao autor de um manual poderá interessar mais a difusão e uso da sua obra do que o lucro (em geral irrisório) que dela poderia tirar, não é razoável esperar igual altruísmo por parte das editoras.

É bom, pois, que existam edições universitárias: porque disponibilizam aos estudantes material de consulta na sua língua; porque combatem a rarefacção do português no discurso técnico-científico; e porque asseguram às obras de valor uma dignidade e permanência que lhes estaria vedada enquanto sebentas ou maços de fotocópias.

Acontece que a vocação de um livro só se cumpre quando ele ultrapassa as paredes da escola onde nasceu. Mau seria se cada universidade usasse em exclusivo os seus livros e ignorasse os das outras; mas a nossa entranhada desconfiança face ao produto nacional, agravada pela distribuição deficiente dessas edições, tende a produzir exactamente esse resultado.

O livro agora em apreço é o 18.º da colecção *Textos de Matemática* da F.C.U.L. O seu autor, José Joaquim Dionísio (1924-1999), foi professor catedrático na F.C.U.L. e membro da Academia das Ciências de Lisboa (para um resumo biográfico, leia-se a evocação de F. R. Dias Agudo no n.º 41 (1999) do Boletim da SPM). O livro vem juntar-se – com grande atraso, pois o manuscrito que lhe serviu de base existe há mais de uma década – aos vários manuais de geometria editados em Portugal nos últimos anos; é por isso de todo o interesse averiguar o que o distingue desses outros livros.

O capítulo 1 descreve o modo como a obra de Euclides foi sendo entendida nos mais de 2300 anos decorridos desde a escrita dos *Elementos*: paradigma do rigor lógico durante mais de 22 séculos, o seu estatuto foi abalado pela revisão crítica dos fundamentos da geometria, empreendida, na viragem dos séculos XIX e XX, por matemáticos como Pasch e Hilbert. Mas já antes disso, com Bolyai, Lobatchevski e Gauss, se tinha entendido que eram logicamente concebíveis geometrias diversas da euclidiana, não sendo possível sequer estabelecer o até então presumido carácter euclidiano do mundo físico. Temos assim Euclides duplamente apeado do seu pedestal: a sua geometria deixa de ser a ciência do espaço, e o seu rigor é tido como insuficiente pelos padrões modernos. Embora factualmente correcto, este capítulo – a começar pelo título: *os postulados de Euclides e a sua insuficiência lógica, matemática e científica* – acentua talvez em excesso o *fracasso* de alguém que é afinal, pela influência e longevidade da sua obra, o autor científico mais bem sucedido de sempre. Para contrabalançar a ênfase negativa, bom seria complementar o presente livro com a leitura de *Geometria Euclidiana* de Franco de Oliveira [4] e de A *Matemática na Grécia Antiga* de Carlos Sá (texto incluído em [2]).

Com um interregno sobre geometria afim no capítulo 3, o livro passa de seguida à construção axiomática da geometria absoluta segundo Hilbert. Tal como Euclides, Hilbert rejeita a introdução de conceitos métricos na sua axiomática: a identificação das rectas com o corpo dos números reais (ou com qualquer outro corpo de números) e a possibilidade de medir grandezas geométricas terão de resultar do desenvolvimento da teoria, e não serem impostas *a priori*. Esse constrangimento era natural em Euclides, que não dispunha da moderna noção de número real; e Hilbert, por seu lado, propunha-se tapar as brechas que o rigor moderno detectava no edifício euclidiano, mas sem o descaracterizar pelo uso de materiais dissonantes. No entanto, é difícil hoje encontrarmos motivação para prescindirmos, no ensino dos fundamentos da geometria, de uma actividade tão natural como a medição ou de um conceito tão básico como o de número. Embora com tal amputação se ganhe um entendimento minucioso de certos conceitos (ordem, separação, propriedade arquimediana, continuidade), há o risco de esse ensino se perder em demonstrações miudinhas e de fraco conteúdo geométrico. Por exemplo, na geometria métrica de Birkhoff dois segmentos dizem-se congruentes se tiverem igual comprimento; neste livro, além dos três axiomas que governam a congruência de segmentos, ainda se prova à parte que se trata de uma relação de equivalência (o que na abordagem métrica dispensa menção especial). É óbvio que, em vez de tais axiomas, outros de conteúdo não menos plausível poderiam ter sido adoptados: por que é que a transitividade (semi)postulada no Axioma III-2 há-de considerar-se mais intuitiva do que a reflexividade demonstrada na Proposição 5.1?

Este livro é, ao que sabemos, o primeiro em Portugal a propor um curso baseado na axiomática de Hilbert ([1] e [4] perfilham a de Birkhoff); e, ainda que tenhamos reservas ao uso pedagógico dessa teoria, ela é um dos marcos da história da matemática. Dá-se até o caso de a obra de Hilbert – igualmente intitulada *Fundamentos da Geometria* – ter sido em 2003 editada em Portugal [3]; e quem quiser lê-la fará bem em estudar previamente o livro de J. J. Dionísio. O livro de Hilbert reserva-nos algumas surpresas; por exemplo, o uso de construções geométricas para definir as operações de corpo, no que é a melhor justificação moderna para a recusa em algebrizar a geometria por via axiomática.

Os axiomas de continuidade completam, no capítulo 6, a descrição da geometria absoluta, permitindo introduzir os números reais para medir comprimentos e ângulos. A construção da função comprimento peca por excessivamente sumária, o que é remediado por um apêndice no final do livro; mas a equivalência entre as versões linear e angular do axioma arquimediano, assunto raro em textos elementares, é tratada ao pormenor. De seguida, a geometria bifurca-se, conforme se acolha ou não o axioma das paralelas. O capítulo 7 versa a geometria euclidiana, começando por apresentar uma série de enunciados equivalentes ao da unicidade das paralelas, entre eles o de ser π a soma de ângulos de um triângulo; em seguida, além de expor a teoria da proporcionalidade (teorema de Tales) e os resultados básicos sobre circunferências, apresenta-nos um ramalhete de teoremas famosos: o do círculo dos nove pontos, os de Menelau e de Ceva, o da recta de Euler, o de Ptolomeu sobre quadriláteros cíclicos, o da recta de Wallace, etc. (mas o melhor livro em português para descobrir a geometria pela sua faceta estética e pela riqueza dos seus métodos e resultados é ainda o de Eduardo Veloso [5]).

O capítulo 7 é maculado por dois deslizes sérios. O primeiro é a formulação errónea do teorema de Menelau: é que, não se usando distâncias orientadas, a condição $AZ \cdot BX \cdot CY = ZB \cdot XC \cdot YA$ – onde ABC é um triângulo, $X \in BC$, $Y \in AC$ e $Z \in AB$ – **não é suficiente** para X, Y e Z serem colineares. De facto, tal condição fica então idêntica à do teorema de Ceva, e portanto qualquer caso deste último em que as rectas XY e AB não sejam paralelas fornece um contra-exemplo ao teorema de Menelau (tal como ele aparece no livro). O segundo erro é a anunciada construção da função área para regiões poligonais. Uma vez estabelecido que a área de um triângulo, dada por metade

do produto da base pela altura, está bem definida (ou seja, não depende do lado escolhido como base), a área de uma região poligonal calcula-se dividindo-se a região em triângulos de que se somam as áreas. A prova que nos é oferecida de que o valor obtido não depende da triangulação usada (lema 7.3) é defeituosa, pois pressupõe a validade de igual resultado para triângulos – ou seja, admite, sem demonstração, que se um triângulo for dividido arbitrariamente em triângulos então a área do triângulo maior é igual à soma das áreas dos menores.

A geometria hiperbólica, ou de Lobatchevski, é o assunto do capítulo 8, que inclui estudos aprofundados do ângulo de paralelismo e do defeito angular de um triângulo (diferença para π da sua soma de ângulos), e culmina com a prova da existência, no plano de Lobatchevski, de triângulos com defeitos tão próximos de zero ou de π quanto se queira. O nono e último capítulo trata das isometrias do plano em geometria absoluta e em geometria euclidiana, ilustrando o uso da teoria com resultados geométricos sugestivos; só é pena que não apresente a classificação das isometrias quando o trabalho adicional para isso seria mínimo. O livro inclui ainda cópia facsimilada de um manuscrito de J. J. Dionísio, datado de 1993, que funciona como complemento ao texto principal – ao tratar, por exemplo, da projecção estereográfica e do modelo de Poincaré para a geometria hiperbólica plana – e dá a conhecer as pertinentes opiniões do autor sobre as vicissitudes do ensino da geometria.

Que méritos podemos apontar ao livro de J. J. Dionísio? Primeiro, a opção por desenvolver a geometria do espaço em simultâneo com a geometria do plano, com isso conseguindo demonstrar, em geometria absoluta, resultados (como os da perpendicularidade entre rectas e planos) que, em abordagens sintéticas, só costumam ser referidos na geometria euclidiana; segundo, a judiciosa escolha dos exercícios; terceiro, o modo como exemplifica, em especial no capítulo 3, através de planos finitos e de modelos analíticos baseados em diferentes corpos, o facto de uma mesma axiomática poder cobrir situações díspares. Além disso, é constante no livro a preocupação em amenizar alguma aridez da teoria com resultados geometricamente sugestivos: temos assim o teorema de Sylvester sobre o número de rectas determinado por n pontos não-colineares no plano; o teorema de Steiner-Lehmus sobre a relação num triângulo entre os comprimentos dos lados e os das bissectrizes dos ângulos; o teorema de Hjelmslev sobre uma correspondência isométrica entre duas rectas; e uma demonstração em geometria absoluta, como corolário do teorema de Fagnano, de que as alturas de um triângulo acutângulo são concorrentes.

Em suma, o livro é útil e bom: útil porque sobre alguns dos seus assuntos não há outros textos em português com o mesmo grau de profundidade; bom porque está bem escrito, bem organizado e bem apresentado, saudando-se em especial a inclusão de um índice remissivo. A ausência de uma bibliografia final é pecado menor, redimido pelas numerosas referências bibliográficas disseminadas no texto. Menos desculpável é a avareza em ilustrações, que torna penosa a leitura de certas passagens: são vários os capítulos sem uma única figura! Até Hilbert ilustrou o seu livro à boa maneira euclidiana, com diagramas representando pontos, rectas e planos – muito embora tenha defendido que a verdade em geometria não seria abalada se, em vez desses objectos tradicionais, nela se falasse de mesas, cadeiras e canecas de cerveja.

Referências

[1] Paulo Ventura Araújo, *Curso de Geometria* (3.ª ed.), Gradiva, 2002
[2] Maria Fernanda Estrada, Carlos Correia de Sá (coordenadores), *História da Matemática*, Universidade Aberta, 2000
[3] David Hilbert, *Fundamentos da Geometria*, Gradiva, 2003
[4] A. J. Franco de Oliveira, *Geometria Euclidiana*, Universidade Aberta, 1995
[5] Eduardo Veloso, *Geometria. Temas Actuais*, Instituto de Inovação Educacional, 1998