A *VESICA PISCES* E O PENTÁGONO REGULAR

José Neto

Professor de matemática aposentado

alves.neto@live.com.pt

Uma vez expostas à luz crua da matemática, o que irá restar da *vesica pisces* e da *mandorla*?

No n.º 181, março de 2017, a *Gazeta de Matemática* publicou o artigo "Mandorla e vesica pisces – sementes dos polígonos", da autoria de Filipe Alberto da Silva [1].

Inerente a este trabalho está a convicção de que a matemática não vive separada da Filosofia e da Estética. Concordo entusiasticamente: nas suas tentativas para tornar o Universo inteligível, o Homem encontra, de vez em quando, harmonias que o surpreendem e fascinam – e que o levam a adotar princípios de harmonia como bússola orientadora nas suas investigações. Porém, o caminho nunca é seguro: as esperadas harmonias podem esconder-se quando esperamos encontrá-las e revelar-se quando menos contamos.

Por muito cativante que seja a ideia de que um esquema gráfico simples como é o da *mandorla/vesica pisces* pode encerrar segredos que vão da criação do mundo à geração dos polígonos regulares, passando pela ascensão de Cristo e pelo princípio feminino, o nosso entusiasmo esfria quando observamos que o pentágono cuja construção é descrita no artigo não é regular.

Proponho-me recordar aqui a construção do pentágono regular como me ensinaram nas aulas de desenho do 4.º ou do 5.º ano do liceu, fazer a sua justificação e analisar a construção apresentada no artigo, "pelo método da *vesica pisces*".

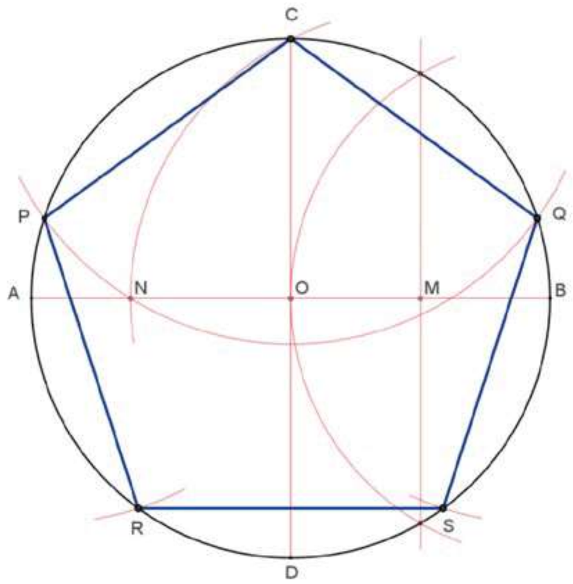
Uma vez expostas à luz crua da matemática, o que irá restar da *vesica pisces* e da *mandorla*?

1. CONSTRUÇÃO DE UM PENTÁGONO REGULAR INSCRITO NUMA CIRCUNFERÊNCIA

Consideremos a circunferência com centro O, já dividida por dois diâmetros perpendiculares, $[AB]$ e $[CD]$.

Passos da construção:

- Determinamos o ponto médio do raio $[OB]$: ponto M.
- Desenhamos um arco de circunferência com centro M e raio $\overline{MC}$, que encontra o segmento $[OA]$ no ponto N.
- Com centro em C e raio $\overline{CN}$, desenhamos um arco de circunferência, que encontra a circunferência dada nos pontos P e Q.
- Com centro em P, desenhamos um arco com o mesmo raio considerado no passo anterior, determinando na circunferência dada o ponto R. Repetimos este processo com centro em Q e determinamos o ponto S.
- O polígono $[CPRSQ]$ é um **pentágono regular**, isto é: um **pentágono que tem todos os lados iguais e todos os ângulos iguais.**



2. JUSTIFICAÇÃO DA CONSTRUÇÃO

Comecemos por notar que as cordas $[PC]$, $[CQ]$, $[PR]$ e $[QS]$ foram construídas com o mesmo comprimento, pelo que os ângulos ao centro POC, COQ, POR e QOS são iguais. Se cada um destes ângulos tiver 72º, o mesmo sucede com o ângulo ROS, pois $360^\circ – 4 \times 72^\circ = 72^\circ$. E isso implica que a corda $[RS]$ seja igual às outras quatro, pelo que o pentágono terá os cinco lados iguais.

Quanto aos ângulos do pentágono, eles também serão iguais, pelo facto de estarem inscritos em arcos de circunferência com a mesma amplitude.

Então, se provarmos que o ângulo POC tem 72º, podemos assumir que o pentágono está bem construído.

Para chegar aí, vamos calcular os comprimentos de alguns segmentos, tomando como unidade o raio da circunferência.

Temos então $\overline{OB} = 1$ e $\overline{OM} = 1/2$.

Pelo teorema de Pitágoras, podemos afirmar que

$$\overline{MC} = \overline{MN} = \sqrt{5/4}.$$

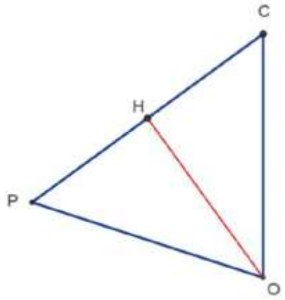
Temos então

$$\overline{NO} = \overline{MN} - \overline{OM} = \sqrt{5/4} - 1/2 = 1/2\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

De novo pelo teorema de Pitágoras, encontramos

$$\overline{CP} = \overline{CN} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(6 - 2\sqrt{5}\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{10}{4} - \frac{2\sqrt{5}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Consideremos agora o triângulo [POC], isósceles, e a altura [OH], relativa ao lado [CP].



Ainda com o teorema de Pitágoras, calculamos:

$$\overline{OH} = \sqrt{1^2 - \overline{PH}^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\overline{CP}}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}}$$
$$= \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{16}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

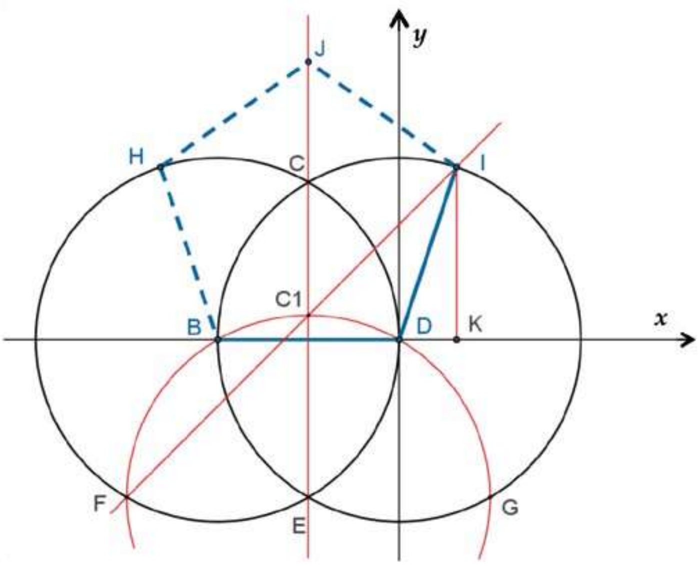
E podemos então afirmar que o cosseno do ângulo POH é igual a $\frac{\overline{OH}}{\overline{OP}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Mas este valor, que é igual a metade do célebre *número de ouro*, é o cosseno de 36º (ver demonstração em anexo). E como a função cosseno é injetiva no conjunto dos ângulos agudos, daí deriva que a amplitude do ângulo POH é 36º e a amplitude do ângulo POC, dupla daquela, é 72º.

□

3. CONSTRUÇÃO DO PENTÁGONO REGULAR (?) "PELO MÉTODO DA *VESICA PISCES*"

Vejamos agora a construção apresentada em [1].

Como base da construção, dispomos de duas circunferências iguais, sendo o centro de cada uma delas um ponto da outra circunferência (ou seja, uma *vesica pisces*, com a sua *mandorla* central). Na figura à direita, os centros são B e D e o segmento por eles determinado é o primeiro lado do pentágono que se vai construir. As circunferências encontram-se em dois pontos, C e E,



Seguidamente, transcrevemos a construção em quatro passos que vem descrita em [1]. A figura ilustra essa construção, mas apenas parcialmente.

1) Com centro em E até B, traçar arco de circunferência. Encontrados os pontos F e G na *vesica pisces* e o ponto $C1$ no eixo vertical CE.

2) Traçar retas de G e F para $C1$. Encontrados os pontos H e I por interseção das retas $GC1$ e $FC1$ (respetivamente) com os arcos exteriores da *vesica*.

3) Centro em H até B, traçar arco. Repetir a mesma operação com centro em I. Encontrado o ponto J no eixo vertical CE.

4) Completar o pentágono regular $JIDBH$.

Analisemos esta construção.

Na figura que apresentamos, considerámos um referencial cartesiano ortonormado, com origem em D, cujos eixos são paralelos aos eixos da *vesica pisces*. Como unidade, tomamos o comprimento de [BD].

Acrescentámos o segmento [IK], perpendicular ao eixo Dx, com $K \in Dx$.

Como a soma dos ângulos externos de qualquer polígono convexo é 360º, se o pentágono fosse regular, a amplitude do ângulo IDK seria 72º (um quinto de 360º) – o que não sucede, como vamos ver.

A circunferência de centro D é definida pela equação $x^2 + y^2 = 1$.

Como as circunferências de centros B e E têm raio unitário, temos que $\overline{EF} = \overline{EB} = \overline{ED} = \overline{BF} = \overline{BD} = 1$, pelo que os triângulos $[BDE]$ e $[BEF]$ (não desenhados) são equiláteros e de lado 1. Os pontos E e F têm ordenada $-\sqrt{3}/2$ (igual a $-\cos 60^\circ$) e as suas abcissas são, respetivamente, $-1/2$ e $-3/2$ (igual a $-1/2 - 1$). Ficamos assim a conhecer os pontos seguintes:

$$D(0,\,0) \qquad B(-1,\,0) \qquad E\left(-1/2,\,-\sqrt{3}/2\right) \qquad F\left(-3/2,\,-\sqrt{3}/2\right)$$

Quanto ao ponto C_1, atendendo a que $\overline{C_1E} = 1$, as coordenadas são $\left(-1/2,\,1-\sqrt{3}/2\right)$.

Então, a reta FC_1 (que vai determinar o ponto I na circunferência de centro D) tem declive

$$\frac{1-\sqrt{3}/2+\sqrt{3}/2}{-1/2+3/2} = 1.$$

e pode ser definida pela equação $y + \sqrt{3}/2 = 1\,(x + 3/2)$, equivalente a $y = x + \frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

Portanto, as coordenadas do ponto I podem ser obtidas resolvendo o sistema constituído pelas equações da circunferência de centro D e da reta FC_1

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x + \frac{3-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Substituindo na 1.ª equação y por $x + \frac{3-\sqrt{3}}{2}$, obtemos uma equação do 2.º grau em x, que fornece as abcissas dos dois pontos de encontro da reta FC_1 com a circunferência. O ponto I é um deles e a sua abcissa é a seguinte:

$$\frac{-3+\sqrt{3}+\sqrt{6\sqrt{3}-4}}{4}.$$

Dispenso-me de apresentar aqui a resolução da equação.

Observando o triângulo retângulo $[IDK]$, cuja hipotenusa tem comprimento 1, podemos então dizer que

$$\cos I\hat{D}K = \frac{-3+\sqrt{3}+\sqrt{6\sqrt{3}-4}}{4}.$$

Ora este valor difere do coseno de 72º, que é igual a $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.[VER ANEXO]

Com auxílio de uma calculadora, ficamos a saber que a amplitude aproximada do ângulo IDK é $71^\circ\,38'$.

Portanto, este **pentágono não é regular** – apesar de ser uma boa aproximação e de ter os cinco lados iguais.

CONCLUSÃO

A informação veiculada no artigo [1] é muito rica e sugestiva nos aspetos estético, histórico, arquitetónico e filosófico.

Mas e do ponto de vista estritamente matemático? Poderemos "salvar" a *vesica pisces*?

A minha resposta é *sim*, se procedermos através de uma construção alternativa. De facto, a *vesica* presta-se mesmo a construções exatas do pentágono regular, sendo dado o comprimento do lado.

Passo a expor a ideia, em traços largos.

Não é difícil provar que o quociente entre qualquer diagonal do pentágono e qualquer lado do mesmo é o número de ouro,

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$ [VER ANEXO]

Retomemos então a figura anterior, continuando a considerar $\overline{BD} = 1$(lado do pentágono a construir).

O vértice contíguo a D e situado à direita de D, que vamos designar por $I1$ (para não confundir com I), fica determinado por duas condições simples: dista $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ de B e dista 1 de D.

Se considerarmos um triângulo retângulo em que um cateto tem comprimento $1/2$ e o outro tem comprimento 1 (o que, na *vesica*, pode ser feito de muitas maneiras), obtemos, na hipotenusa, o comprimento $\sqrt{5}/2$. Na figura, construiu-se $[PQ]$ e, depois, com o mesmo comprimento, $[PR]$.

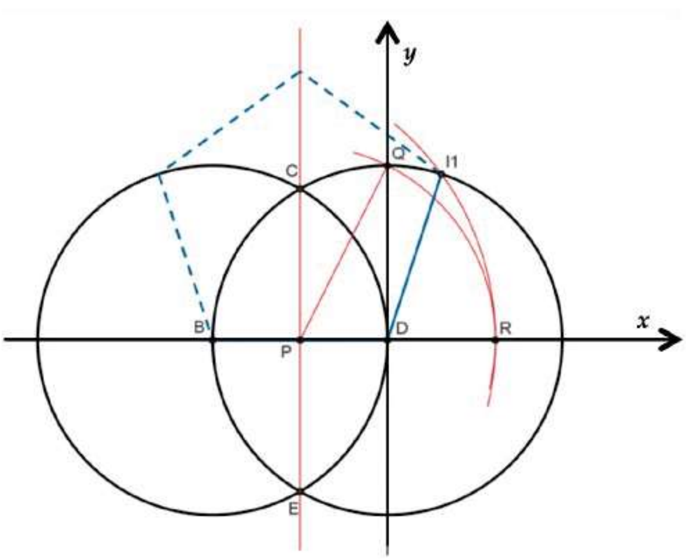
Depois, se prolongarmos com um segmento de comprimento $1/2$, já temos um outro segmento com comprimento

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Na figura, temos $[BR]$.

Para determinar o ponto $I1$, basta agora determinar um dos dois pontos de encontro da circunferência de centro D e raio 1 com a circunferência de centro B e raio Φ.

E o resto da construção decorre sem dificuldade.



ANEXO – VALORES TRIGONOMÉTRICOS DE 36º E 72º E MEDIDA DA DIAGONAL DO PENTÁGONO REGULAR

Por estarem associadas, de alguma maneira, ao pentágono regular, as amplitudes de 18º, 36º, 54º e 72º merecem ser consideradas *amplitudes notáveis*, a par das amplitudes de 30º, 45º e 60º.

As amplitudes de 36º e 54º, respetivamente dupla e tripla da amplitude de 18º, são, além disso, complementares e, portanto, $\cos 54º = \operatorname{sen} 36º$.

Designando, por razões de comodidade, a amplitude de 18º por α, podemos escrever $\cos(3\alpha) = \operatorname{sen}(2\alpha)$, equação que nos habilita a calcular o valor exato de $\operatorname{sen} 18º$.

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha) = \operatorname{sen}(2\alpha) &\Leftrightarrow \cos(2\alpha+\alpha) = \operatorname{sen}(2\alpha)\\ &\Leftrightarrow \cos(2\alpha)\cos\alpha - \operatorname{sen}(2\alpha)\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha)\\ &\Leftrightarrow (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)\cos\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha\\ &= 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha.\end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros desta equação por $\cos\alpha$ (que é diferente de zero), vem:

$$\begin{aligned}&\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\\ &\Leftrightarrow -4\operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha + 1 = 0\\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{1\pm\sqrt{5}}{-4}.\end{aligned}$$

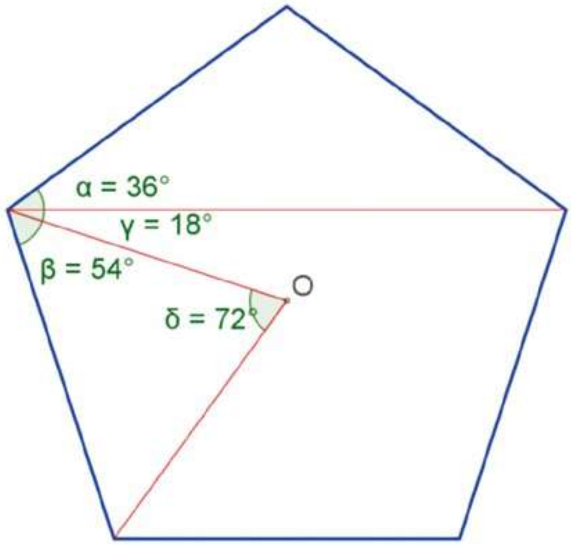
O valor que nos interessa é a solução positiva, portanto,

$$\operatorname{sen} 18º = \frac{1-\sqrt{5}}{-4}.$$

A partir deste resultado, podemos agora calcular os valores trigonométricos de que precisamos, no contexto da exposição anterior: $\cos 36º$ e $\cos 72º$.

$$\begin{aligned}\cos 36º &= \cos(2\times 18º) = \cos^2 18º - \operatorname{sen}^2 18º = 1 - 2\operatorname{sen}^2 18º\\ &= 1 - 2\times\left(\frac{1-\sqrt{5}}{-4}\right)^2 = 1 - 2\times\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\\ &= 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 72º &= \cos(2\times 36º) = \cos^2 36º - \operatorname{sen}^2 36º\\ &= -1 + 2\cos^2 36º = -1 + 2\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2\\ &= -1 + 2\times\frac{6+2\sqrt{5}}{16} = -1 + \frac{3+\sqrt{5}}{4}\\ &= \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.\end{aligned}$$



Quanto à medida da diagonal do pentágono relativa ao lado, podemos ver agora claramente que é Φ.

Observemos a última figura. Se designarmos por l e d as medidas respetivas dos comprimentos do lado e da diagonal, e tomando $l = 1$, segue-se que:

$$\cos 36º = \frac{d/2}{l} \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{d}{2} \Leftrightarrow d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ou seja: $d = \Phi$.

REFERÊNCIAS

[1] Silva, Filipe Alberto da, "Mandorla e Vesica Pisces – Sementes dos Polígonos", *Gazeta de Matemática* 181, pp. 10-15, mar. 2017.

SOBRE O AUTOR

José Neto é licenciado em Matemática – Ramo Educacional pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e professor de matemática do ensino secundário, aposentado. É coautor do manual de matemática do 10.º ano publicado em 1993 pelas Edições ASA e autor do livro de exercícios resolvidos *Como se faz?* (matemática A, 12.º ano), publicado em 2004 pela mesma editora. Entre1996 e 2000, orientou estágios pedagógicos de matemática para a Universidade Portucalense.