


PEDRO J. FREITAS
Universidade
de Lisboa
pjfreitas@fc.ul.pt

MANUEL SILVA
Universidade
Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

SOMA DE PALÍNDROMOS

Lagrange demonstrou que todo o número natural pode ser escrito como soma de quatro quadrados perfeitos. Um resultado recente diz-nos que existem também representações dos números naturais como soma de um certo número de palíndromos.

1 INTRODUÇÃO

Recordemos que uma capicua, ou número palín--dromo, é um número inteiro que coincide com o seu reverso, i.e., pode ser lido da mesma forma da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. A noção de palíndromo depende naturalmente da base em que escrevemos o número. Por exemplo, o número 22 é um palíndromo quando consideramos a sua expansão decimal, mas na sua representação binária, dada por 10110, já não é um palíndromo. Para simplificar a discussão, vamos considerar quase sempre a representação decimal.

Existem diversos problemas em aberto envolvendo palíndromos. Talvez o mais famoso seja o dos números de Lychrel. Definimos um processo iterativo que transforma quase todos os números em palíndromos. Começamos por um número natural qualquer e somamos esse numero com o seu recíproco, i.e., o número que se obtém lendo da direita para a esquerda. Por exemplo, se o número inicial for 57, somamos 57 com 75 e obtemos 132. Podemos repetir mais uma vez esta operação, somando 132 com o seu recíproco 231, obtendo desta forma 363. O resultado obtido neste segundo passo é um palíndromo! Será que este processo iterativo, independentemente do número de partida, produz invariavelmente um palíndromo? Se experimentarmos um número ao acaso, iremos quase sempre obter, sem ser necessário muitas iterações, um palíndromo. No entanto, alguns números parecem resistir a transformar-se em palíndromos. Veja-se o enigmático 196, para o qual foram calculados, com um esforço computacional significativo, números com mais de mil milhões de dígitos sem que surja um palíndromo. Um número diz-se de Lychrel se nunca produzir um palíndromo pelo processo iterativo descrito. Não se sabe se existe algum número de Lychrel, mas o 196 é o candidato mais bem colocado.

QUADRADOS PERFEITOS E PALÍNDROMOS

Nem todos os conjuntos de números naturais merecem a mesma atenção e o mesmo respeito por parte dos matemáticos. Os conjuntos dos números primos e dos quadrados perfeitos são certamente mais importantes do que o conjunto dos palíndromos. Existem diversos resultados interessantes sobre os números primos, ou sobre os quadrados perfeitos, mas não se conhecem muitas propriedades envolvendo palíndromos. Vamos agora descrever um resultado recente sobre a estrutura aritmética dos palíndromos.

Teorema [2]. *Todo o número natural pode ser escrito como soma de três palíndromos.*

Por exemplo, a representação de 201 como soma de palíndromos é a seguinte: $201 = 101 + 99 + 1$. O resultado é válido não só para a expansão decimal, mas para qualquer base $b \geq 5$. Um conjunto de números naturais S tal que todo o número natural se possa escrever como soma de um número fixo de parcelas de S diz-se uma base aditiva.

Lagrange demonstrou, em 1770, que todo o número natural pode ser escrito como soma de quatro quadrados perfeitos. Podemos dizer que os quadrados perfeitos formam uma base aditiva de ordem 4. Schnirelmann demonstrou, em 1930, que os números primos constituem igualmente base aditiva. Sabemos agora que os palíndromos são uma base aditiva de ordem 3. Este teorema melhora um resultado anterior, também recente, que afirmava ser possível representar qualquer número natural como soma de 49 palíndromos [1].

A demonstração deste resultado ocupa 42 páginas e não é muito instrutiva. A ideia é subdividir os números naturais em diversos tipos, apresentando-se em seguida um algoritmo que mostra produzir sempre uma solução do problema. O algoritmo apresentado pode facilmente ser implementado em computador, para produzir uma solução específica qualquer. Trata-se, por isso, de uma prova construtiva e não apenas uma demonstração de existência. O argumento, como referimos anteriormente, funciona para todas as bases $b \geq 5$.

Falta saber o que se passa para $b = 2, 3, 4$. O problema para palíndromos em bases pequenas foi também resolvido este ano, num outro artigo [3]. Os autores fazem notar que o problema da representação de um número como soma de palíndromos pode ser traduzido naturalmente em termos de linguagens formais e autómatos. Um autómato é uma máquina com um número finito de estados e regras de transição que reconhece certas linguagens, i.e., dada uma palavra, o autómato é capaz de saber se esta pertence ou não à linguagem dada. O primeiro passo é encontrar um autómato que reconheça todos os números que podem ser escritos como soma de palíndromos, para um certo número fixo de parcelas. Em seguida, mostra-se que o autómato definido é universal. A demonstração é feita neste caso por um programa de computador. O autómato utilizado tinha cerca de 25.000 estados, o que é considerado razoável do ponto de vista computacional.

A mesma técnica de demonstração pode certamente ser usada para provar outros resultados matemáticos. Os autores afirmam no final do artigo que, se um argumento matemático implica a análise de demasiados casos, talvez seja boa ideia transformar a demonstração num algoritmo. Melhor ainda, devemos, se possível, procurar um autómato que descreva o problema, e assim produzir uma prova automática.

NÚMEROS PRIMOS E PALÍNDROMOS

Não sabemos se existe, ou não, um número infinito de números primos que sejam simultaneamente palíndromos. É possível, com a ajuda de um computador, encontrar diversos números primos palíndromos, mas nada nos garante que estes números se esgotem. Heuristicamente, e se acreditarmos que as definições de número primo e de palíndromo são independentes, deveria ser possível encontrar números arbitrariamente grandes satisfazendo as duas propriedades em simultâneo. Na verdade, para uma certa noção natural de densidade de conjuntos inteiros, podemos demonstrar que quase todos os números palíndromos são compostos, o que nos mostra que estas duas noções não são independentes.

Dirichlet provou, em 1837, que existem infinitos números primos em todas as progressões aritméticas infinitas, desde que não exista um divisor comum a todos os elementos da sequência. Na verdade, o resultado diz-nos que os números primos estão bem distribuídos em todas as progressões aritméticas. Em particular, podemos encontrar tantos primos da forma $3n + 1$ como da forma $3n + 2$, a probabilidade de um número primo deixar resto 1 ou 2 quando dividido por 3 é a mesma. Para algumas propriedades os números primos comportam-se de modo aleatório, ou neutro.

Analogamente ao que se passa com os números primos, existem também infinitos palíndromos em quase todas as progressões aritméticas infinitas. A única exceção são as progressões onde todos os elementos são múltiplos de 10, isto porque, sendo o último dígito zero, não podem conter palíndromos. A distribuição dos palíndromos pelas progressões aritméticas, ao contrário dos primos, não será certamente regular.

Terminamos esta pequena digressão no mundo dos palíndromos com um desafio. Consideremos a sequência infinita: 1, 12, 123, 1234, 12345, ... onde cada elemento se obtém juntando os primeiros n números naturais. Será que algum elemento desta sequência depois do primeiro volta a ser um palíndromo?

REFERÊNCIAS

[1] W. Banks, *Every Natural Number is the Sum of Forty-nine Palindromes*, Integers (2016).

[2] J. Cilleruelo, F. Luca, L. Baxter, *Every positive integer is a sum of three palindromes*, Mathematics of Computation (2017).

[3] A. Rajasekaran, J. Shallit, T. Smith, *Sums of Palindromes: an Approach via Automata*, submitted to STACS, September 2017.