

## PEDRO NUNES E O HORÓPTERO: BREVE HISTORIOGRAFIA DE UMA NOTA DE RODAPÉ

NUNO ALEXANDRE DE SÁ TEIXEIRA

UNIVERSIDADE DE ROMA "TOR VERGATA" E UNIVERSIDADE DE COIMBRA

[de.sa.teixeira@gmail.com](mailto:de.sa.teixeira@gmail.com)

O nome de Pedro Nunes surge frequentemente associado, na literatura acerca da visão binocular, a um método de medida empírica do chamado horóptero – curva teórica que liga todas as localizações espaciais que estimulam pontos correspondentes nas retinas de ambos os olhos. Mas o que é que motiva a menção ao matemático português ao discutir uma metodologia psicofísica?

Alguém que se interesse pela produção científica acerca de percepção binocular poderá já ter-se deparado com o artigo publicado em 2003 por Ono e colaboradores no reputado *Journal of Experimental Psychology*<sup>1</sup>. Este trata das implicações que tem para a percepção o facto de que, por possuímos dois olhos e, logo, dois pontos de vantagem espacialmente distintos para a apreensão visual do mundo, um pequeno objeto posicionado à nossa frente, em certas ocasiões, necessariamente oculta monocularmente partes distintas de um plano situado por detrás desse (facto notado por Leonardo Da Vinci). Para o/a leitor/a que se interesse pelo tópico, este artigo será certamente de interesse e asseguro-lhe que poderá aqui encontrar um tratamento cientificamente rigoroso desta questão. Não obstante, e para os propósitos do presente ensaio, importa destacar a seguinte afirmação, relegada para uma breve nota de rodapé (n.º2): “*Nonius* é o nome latinizado de Pedro Nunes, que usou [estes] estímulos para aceder ao erro de fixação binocular”<sup>2</sup>. Esta nota refere-se ao horóptero-nónio (ver adiante), que é simultaneamente uma conceptualização e uma técnica de medida deste importante conceito psicofísico da percepção binocular. Mas que ligação existe entre o matemático português e o horóptero? Terá sido Pedro Nunes um pioneiro da Psicologia e desenvolvido estudos empíricos acerca da percepção binocular, como parece ser sugerido nesta nota de rodapé? E se assim foi, por que não é a fonte devidamente identificada como é usual? O/A leitor/a poderá já antecipar que a resposta a estas questões é, sumariamente, não, Pedro Nunes não contribuiu diretamente para o estudo

científico da percepção visual, elaboração do horóptero ou qualquer outro tópico de pesquisa em torno da percepção binocular e/ou estereoscópica e, para todos os efeitos, a sugestão nesta nota de rodapé é errónea. E, contudo, à parte a sugestão de uma contribuição explícita para o estudo do horóptero, este não é um caso isolado, como veremos adiante, sendo o nome do matemático frequentemente referido em tratamentos acerca deste tópico. Procurarei aqui clarificar o como e o porquê da associação entre Pedro Nunes e o horóptero, começando, sem mais demoras, por uma breve explicação deste último.

### A VISÃO BINOCULAR E O HORÓPTERO

Que de uma estrutura anatómica com dois olhos emerge uma percepção aparentemente una e contínua do mundo suscitou interesse ao longo de virtualmente toda a história da cultura ocidental, intrigando vários pensadores e investigadores pelas questões geométricas implicadas pela visão binocular. Ptolomeu (c. 100-170 a.C.), matemático e astrónomo da Antiguidade, parece ter sido o primeiro a intuir a existência de uma correspondência direta entre pontos de ambos os olhos, na sua obra *Optica*, ainda que desta não tenha chegado até nós o primeiro volume (no qual trataria de aspetos físicos da visão) e dos restantes quatro apenas nos chegou uma tradução incoerente para o latim de uma versão árabe do grego original<sup>3</sup>. Posteriormente, na época medieval, Ibn al-Haytham (conhecido pelo nome latinizado de Alhazen; 965-1040), matemático e físico árabe, debruçou-se também sobre a geometria da visão binocular, antecipando já alguns aspetos do horóptero<sup>4</sup>. Um tratamento mais cuidado deve-se a Franciscus Anguilonius (1567-1617), padre jesuíta belga, que introduz também o termo “horóptero” (do grego *horos*, limite, e *opter*, observador) para se referir à entidade geométrica abstrata que conecta as direções visuais que estimulam pontos correspondentes na retina de cada olho. Na sua obra de 1613, *Opticorum Libri Sex Philosophis Juzta ac Mathematicis Utiles* ou, na sua forma abreviada, *Seis Livros de Óptica*, o horóptero é descrito e

<sup>1</sup> Ono, H., Lillakas, L., Grove, P. M., & Suzuki, M. (2003). “Leonardo’s constraint: Two opaque objects cannot be seen in the same direction”. *Journal of Experimental Psychology: General*, 132, 253-265.

<sup>2</sup> *Nonius is the latinized name of Pedro Nunes, who used the stimuli to access binocular fixation error.* (p. 256).

<sup>3</sup> Lindberg, D. C. (1976). *Theories of vision from Al-Kindi to Kepler*. Chicago: University of Chicago Press.

<sup>4</sup> Raynaud, D. (2016). *Studies on binocular vision: Optics, vision and perspective from the thirteenth to the seventeenth centuries*. Springer.



Figura 1. Frontispício, atribuído a Pieter Paul Rubens, do livro IV de Franciscus Angulionius. O “observador” na imagem fixa o objeto imediatamente à sua frente, sendo a direção visual de cada olho dada pelas linhas projetadas na superfície ao fundo, na qual as diplopias (imagens duplas) são assinaladas pelos querubins.

elaborado, acompanhado por um frontispício alegadamente da autoria de Pieter Paul Rubens (1577-1640; ver figura 1)<sup>5</sup>. Por fim, numa obra publicada postumamente em 1704, Christiaan Huygens (1629-1695), matemático, físico e astrónomo holandês, formula a correspondência entre pontos distintos na retina como condição para a fusão binocular das imagens de ambos os olhos e, portanto, para a visão estereoscópica.

Caberia, contudo, a Gerhard Vieth (1763-1836) e a Johannes Müller (1801-1858), ambos fisiólogos alemães, a descrição independente da geometria teórica do horóptero, dando assim início à investigação científica moderna deste importante conceito. Devido à fisiologia ocular, e assumindo que ambos os olhos são perfeitamente esféricos, quando um dado objeto é focado binocularmente, o conjunto de pontos que estimulam localizações correspondentes em ambas as retinas é dado por um círculo (se nos restringirmos ao plano horizontal) contendo o ponto de fixação e ambas as pupilas (na descrição de Vieth) ou os centros das lentes oculares (de acordo com Müller). A figura 2 (baseada no diagrama de Müller) deverá esclarecer o que se entende, então, por horóptero. Os dois círculos menores no fundo da imagem representam os dois olhos (vistos de cima). O ponto  $A$  é aqui o ponto de fixação – ambos os olhos estão direcionados para este de forma a que a imagem de  $A$  (linhas contínuas e pontos  $a_e$  e  $a_d$ , para as projeções no olho esquerdo e direito, respetivamente) coincida com a fóvea (área central da retina com a maior resolução). Como os olhos possuem uma estrutura comum e simétrica,

por assunção, um qualquer ponto do círculo maior, a tracejado, irá estimular pontos correspondentes em ambas as retinas. Considere-se o ponto  $B$ : este irá estimular os pontos  $b_e$  e  $b_d$  (no olho esquerdo e direito, respetivamente) que, por se encontrarem a uma igual distância da fóvea (os raios visuais estão em ângulos congruentes em relação àqueles que originam as imagens  $a_e$  e  $a_d$ ), representam pontos correspondentes. O horóptero propriamente dito corresponde aqui ao círculo maior, a tracejado, que liga todos os pontos que irão estimular recetores correspondentes na retina – este é designado por *círculo de Vieth-Müller*, por razões óbvias. Mais, qualquer objeto que, no mundo, ocupe uma posição coincidente com o círculo de Vieth-Müller será visto pelo observador como uma única imagem, fundida estereoscopicamente (a rigor, e para a visão estereoscópica, basta que um objeto ocupe uma área centrada no horóptero, conhecida como *área fusional de Panum*). Objetos fora ou dentro do círculo de Vieth-Müller, por estimularem pontos díspares na retina, serão vistos como uma imagem dupla ou diplopia (que pode ser cruzada ou homónima, respetivamente para objetos dentro ou fora do horóptero), sendo esta tão maior quanto mais distante do horóptero estiver o objeto. Finalmente, note-se que, consoante o ponto de fixação esteja a uma menor ou maior distância do observador, o horóptero será dado respetivamente por um círculo com um menor ou maior diâmetro. Porque o nosso sistema visual tende a ignorar as diplopias, estas não serão de imediato óbvias na nossa perceção. Porém, o/a leitor/a poderá rapidamente constatar a sua presença com o seguinte exercício: coloque ambos os indicadores direito e esquerdo das suas mãos alinhados e em frente à sua face, de tal forma que um fique a cerca do dobro da distância do seu nariz em relação ao outro – foque alternadamente o indicador mais distante e o mais próximo, prestando atenção às imagens visuais do outro dedo. Deverá ver imagens duplicadas (na horizontal) do dedo não fixado.

Importa sublinhar que o círculo de Vieth-Müller é uma entidade teórica, resultante de uma abstração geométrica baseada na assunção de que ambos os olhos são perfeitamente esféricos. Determinar empiricamente a geometria do horóptero é não só possível como veio a ocupar parte considerável da literatura em Psicologia de finais do século XIX e início do século XX. Poupano ao/à leitor/a uma descrição exaustiva dos vários métodos sugeridos para a sua medida, importa aqui realçar aquele que veio a ficar conhecido como o método do nónio (enfaticamente designado como o único e real horóptero por Shipley e Rawlings, 1970). O observador para o qual se pretende medir o horóptero é de-

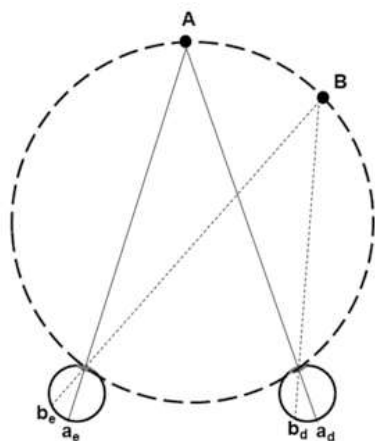


Figura 2. Descrição geométrica do círculo de Vieth-Müller ou horóptero teórico. Ver texto para detalhes.

vidamente posicionado de forma a poder fixar com ambos os olhos um ponto à sua frente indicado por um marcador específico (por exemplo, uma pequena bola negra a uma dada distância do observador). Numa direção distinta daquela ocupada pelo ponto de fixação, mas dentro do campo visual do observador, é colocado, por exemplo, um arame alinhado verticalmente. A distância deste arame aos olhos do observador pode ser ajustada (ou por ele ou pelo experimentador). Finalmente, em frente aos olhos do observador é colocada uma máscara cuidadosamente elaborada para permitir uma visão desimpedida do ponto de fixação por ambos os olhos, mas apenas uma visão parcial do arame: por exemplo, com o olho esquerdo o observador consegue ver a secção inferior do arame mas apenas a secção superior com o olho direito. Se o arame estiver situado além ou aquém do horóptero, o observador verá as duas porções do arame (imagens no olho esquerdo e direito) desalinhadas entre si. Quando o arame ocupa uma posição no horóptero, o observador conseguirá ver ambas as porções do arame alinhadas verticalmente – a posição do arame e, portanto, a localização desse ponto do horóptero, é então registada. O mesmo procedimento é repetido para várias direções dentro do campo visual do observador até que se obtenha uma caracterização adequada da curva do horóptero. Para terminar esta explicação, indico apenas que o horóptero empiricamente determinado não corresponde ao círculo de Vieth-Müller: a sua forma tende a possuir uma curvatura ligeiramente menor do que a postulada pelo círculo, o que veio a ficar conhecido como o *desvio de Hering-Hillebrand* (referência aos autores que originalmente o descobriram). A explicação para o desvio prende-se não só com irregularidades na lente dos olhos como com a diferenças na densida-

de de células fotossensíveis na retina. Seja como for, o ponto relevante para o presente texto é o termo “nónio”, que invariavelmente designa na literatura da especialidade o método acima descrito ou variantes do mesmo. Este parece ter sido proposto originalmente por S. G. van der Meulen em 1873<sup>6</sup>, mas referido por método ou critério de “nónio” a partir das pesquisas feitas em Viena pelo austríaco Armin Tschermak, entre 1900 e 1924<sup>7</sup>. Finalmente, num artigo de 1932, o americano Adelbert Ames refina o método, mantendo a designação de “nónio”<sup>8</sup>.

## PEDRO NUNES E O NÓNIO

A razão da escolha do termo “nónio” para designar um método de medida do horóptero é relativamente óbvia e não oferece grandes ambiguidades. *Nonius*, versão latina de Nunes, descreve a solução elaborada pelo matemático e cosmógrafo português Pedro Nunes (1502-1578) para uma leitura mais precisa de uma medida dada no mostrador numérico de um instrumento, originalmente pensado para o astrolábio (instrumento para a medida da altura acima do horizonte de objetos celestes). O nóvio é descrito por Pedro Nunes na sua obra de 1542, *De Crepusculis* (para a elaboração do presente ensaio, e no que se refere a Pedro Nunes e o Nóvio, baseio-me extensamente nos artigos de António Estácio dos Reis<sup>9</sup>). De forma breve, Pedro Nunes concebe a ideia de um astrolábio contendo não só a usual escala graduada de 0° a 90°, mas um conjunto de outras escalas, concêntricas com a primeira, mas divididas em secções progressivamente maiores (de 0 a 89, de 0 a 88, etc.). Dada uma qualquer medida em que o ponteiro não coincida exatamente com uma das subdivisões da primeira graduação, é provável que, contudo, coincida com uma das restantes (ou dela se aproxime). Graduando essas escalas de uma forma adequada, será possível obter uma medida mais precisa do que aquela permitida por uma única graduação, notando a coincidência entre o ponteiro e as marcas graduadas das

<sup>5</sup> Ver Shipley, T., & Rawlings (1970). *The nonius horopter – I. History and theory*. *Vision Research*, 10, 1225-1262.

<sup>6</sup> Van der Meulen, S. G. (1873). *Stereoskopie bei unvollkommenem schwermögen*. *Archive für Ophthalmology*, 19, 100-136-

<sup>7</sup> Tschermak, A. (1924). *Fortgesetzte studien über binokularesehen*. *Pflugers Archiv für die Gesamte Physiologie des Menschen und der Tiere*, 204, 234-246.

<sup>8</sup> Ames, A. (1932). “Corresponding retinal points, the horopter and size and shape of ocular images.” *Journal of the Optical Society of America*, 22, 575-631.

<sup>9</sup> Reis, A. E. (2002). “O nóvio de Pedro Nunes.” *Gazeta de Matemática*, 143, 5-19. Conferir também a página [pedronunes.cienciaviva.pt](http://pedronunes.cienciaviva.pt)

diversas escalas. Ainda que Pedro Nunes não pareça (tanto quanto é possível averiguar) ter-se dedicado às questões geométricas da visão binocular, é interessante notar que a sua ideia para o nónio surge inspirada por uma passagem do *Almagesto* de Ptolomeu, autor que, como atrás referido, foi pioneiro no estudo de direções visuais correspondentes em ambos os olhos, ainda que numa outra obra (*Optica*). Em qualquer caso, e tal como um navegador usando um astrolábio dotado de um nónio deverá obter uma medida da altura de um corpo celeste procurando o melhor alinhamento entre duas linhas (a do ponteiro e uma das marcas nas escalas graduadas), também assim deve um observador sujeito a uma medida do horóptero procurar o melhor alinhamento entre duas linhas (a secção superior e inferior do arame ajustável, vistas com os olhos direito e esquerdo). Esta parece ser, fundamentalmente, a similaridade que suporta o uso do termo “nónio” para o método psicofísico. Ocorre que, ainda que Pedro Nunes tenha concebido a ideia para o nónio, não parece que tenha assistido à sua execução prática, quando muito pelo facto de que a tecnologia da altura dificilmente poderia ter suplantado as dificuldades técnicas, em particular a precisão geométrica, necessárias à sua construção. Isto não obstante a anedótica sugestão de Francisco Stockler, em 1818, de acordo com a qual não só teria existido no país uma versão do nónio como a mesma teria sido destruída e o metal usado para o gradeamento de uma igreja beneditina em Coimbra, hoje demolida. À parte esta indicação, e passando aqui por cima do uso que Tycho Brahe (1546-1601) deu às ideias de Pedro Nunes, terá sido o francês Pierre Vernier (1580-1637) a conceber uma concretização prática do nónio, sob a forma de um setor graduado móvel (hoje ainda presente em alguns paquímetros e outros instrumentos de medida). Desde então, os termos “nónio” e “vernier” têm ambos sido usados para designar o uso de subescalas graduadas cuja leitura se baseia na correspondência visual de linhas marcadoras, frequentemente com um dos termos a ser preterido em relação ao outro em diferentes línguas e países. Aliás, conforme nos relata António Estácio dos Reis, uma certa tensão acerca de qual autor reconhecer ao apelidar subescalas graduadas, Pedro Nunes ou Pierre Vernier, remonta já a Jérôme Lalande, que em 1771 defende o uso do termo “vernier”. Apenas quatro anos depois, João Jacinto de Magalhães reage, argumentando a favor do uso do termo “nónio”.

### PEDRO NUNES E O HORÓPTERO

Retomando a nota de rodapé com a qual iniciei a presente discussão, e conforme havia já indicado, a referência a Pedro

Nunes no âmbito de discussões em torno do horóptero não se esgota no artigo de Ono e colaboradores. Na literatura especializada, a referência é relativamente ocorrente, ainda que somente o artigo de Ono (tanto quanto consegui averiguar) pareça implicar um envolvimento direto de Pedro Nunes em estudos empíricos. Com efeito, e sem procurar ser exaustivo, encontramos no livro de David Stidwill e Robert Fletcher de 2011, *Normal Binocular Vision*, na página 81, o seguinte: “O método de vernier foi originalmente usado pelo matemático português Nunez [sic] (em latim, Nonius) para a calibração de instrumentos astronómicos”<sup>10</sup>. Pierre Buser e Michel Imbert, na obra *Neurophysiologie Fonctionnelle: Vision (tome IV)*, de 1987 (tradução inglesa de 1992; página 180) referem que “o procedimento preferido é aquele que explora a técnica binocular de vernier (por vezes referida como Nonius após o nome Nunez [sic], matemático português do século XVI)”<sup>11</sup>. Por fim, Ian Howard e Brian Rogers, tanto no livro de 1995 (*Binocular Vision and Stereopsis*, página 55)<sup>12</sup> como na obra de 2012 (*Perceiving in Depth: volume 2*, página 173)<sup>13</sup> explicitam que “tais pares de linhas são conhecidas como linhas nonius, do nome latinizado de Pedro Nuñez [sic], um matemático português do século XVI que inventou uma forma antiga da escala de Vernier”<sup>14</sup>. Curiosamente, no exaustivo artigo dedicado à história e à teoria do horóptero-nónio, Shipley e Rawlings (1970) não oferecem qualquer menção a Pedro Nunes. A ocorrência mais antiga do nome do matemático que consegui encontrar na literatura sobre o horóptero deve-se a Keneth Ogle, na sua obra clássica *Researches in Binocular Vision* (originalmente publicado em 1950 e reeditado em 1964, a versão consultada para o presente texto), numa nota de rodapé na página 37: “Nonius é a forma latinizada de Nunes, o nome de um matemático português, e refere-se a um dispositivo usado em tempos em instrumentos graduados. O dispositivo foi subsequentemente melhorado para o vernier”<sup>15</sup>. Esta nota parece efetivamente ser a origem de todas as subsequentes referências e destaca-se por ser a única que encontrei que de facto cita uma fonte: o *Webster’s New International Dictionary* (Ogle deverá ter consultado a segunda edição, de 1934). Parece, pois, provável que o esclarecimento que Ogle se sentiu compelido a fazer acerca do termo *nonius* tenha iniciado uma sequência de breves referências a Pedro Nunes, cada uma “autorizando” a seguinte, até culminar na sugestão errónea de Ono de que o português tenha antecipado a determinação empírica do horóptero.

Em jeito de conclusão, resta apenas tentar perceber por que Ogle julgou necessário clarificar a origem do termo *nonius*. Sem excluir a possibilidade de que tenha sido tão-

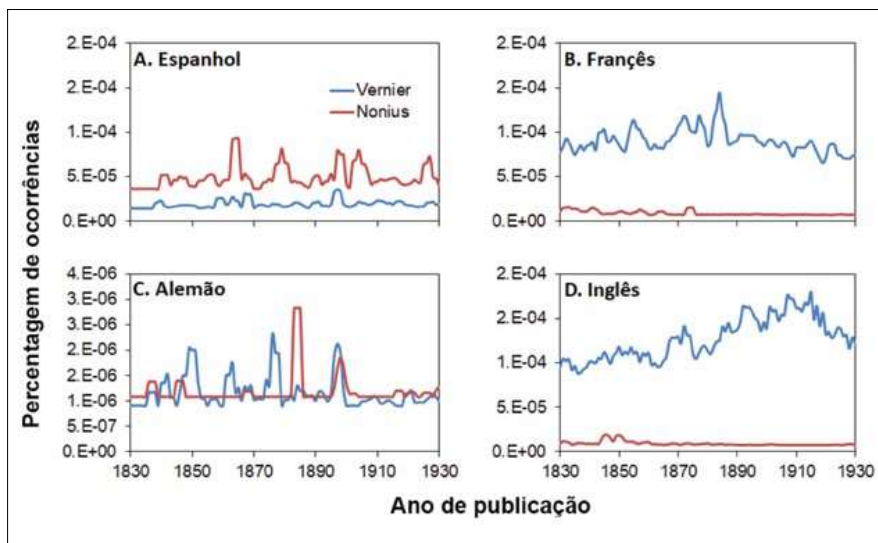


Figura 3. Frequência dos termos *vernier* (linhas a azul) e *nonius* (linhas a vermelho) em livros publicados entre 1830 e 1930 em espanhol (painel A), francês (painel B), alemão (painel C) e inglês (painel D). Dados extraídos de Google Ngram Viewer.

-samente uma curiosidade histórica, é possível que a pouca frequência do termo na língua inglesa tenha motivado o esclarecimento. Ainda que com carácter meramente exploratório, a figura 3 mostra a prevalência de ocorrências dos termos *vernier* e *nonius*, em livros publicados entre 1830 e 1930 (altura em que as pesquisas modernas sobre o horóptero se iniciam) e indexados na ferramenta *Google Ngram Viewer*, nas línguas espanhola (painel A; o português não está contemplado na plataforma), francesa (painel B), alemã (painel C) e inglesa (painel D). De uma forma heurística, estes dados sugerem que, como esperado, *nonius* é mais prevalente que *vernier* nas publicações espanholas, sendo o inverso verdade para a língua francófona. Para o alemão, ambos os termos ocorrem com uma baixa frequência, sem que nenhum se destaque, o que poderá explicar a ausência de referências a Pedro Nunes nos artigos de Tschermak: se *nónio* e *vernier* eram tomados como sinónimos na língua germânica, a adoção de um ou de outro para a medida do horóptero seria relativamente indiferente. Acresce que o termo *vernier* era já usado nas ciências psicológicas para medidas de acuidade visual (acuidade de *vernier* – baseada na capacidade de um observador de discriminar pequenos desalinhamentos entre linhas verticais a uma dada distância). Finalmente, na literatura inglesa a predileção é claramente para o termo *vernier*, sendo *nonius* relativamente invulgar. Em suma, é possível que, dado o significado relativamente obscuro no inglês do termo *nonius*, Kenneth Ogle tenha julgado necessário incluir o esclarecimento para os leitores anglófonos, após consultar um dicionário de referência. Seja ou não esse o caso, e ainda que meramente como alusão numa ou outra nota de rodapé, o nome

de Pedro Nunes veio a ocupar o seu lugar numa literatura científica relativamente inesperada acerca da visão e da percepção binocular.

<sup>10</sup> *The vernier method was originally used by the Portuguese mathematician Nunez (in latin, Nonius) for calibrating astronomical instruments.* Stidwill, D., & Fletcher, R. (2011). *Normal Binocular Vision: Theory, investigation and practical aspects.* Oxford: Blackwell Publishing.

<sup>11</sup> *A preferred procedure is one exploiting a binocular vernier technique (sometimes referred to as of Nonius after the name Nunez, a Portuguese mathematician of the 16th Century).* Buser, P., & Imbert, M. (1992). *Vision.* Cambridge, MA: MIT Press.

<sup>12</sup> Howard, I. P., & Rogers, B. J. (1995). *Binocular vision and stereopsis.* New York: Oxford University Press.

<sup>13</sup> Howard, I. P., & Rogers, B. J. (2012). *Perceiving in depth: Volume 2.* New York: Oxford University Press.

<sup>14</sup> *Such pairs of lines are known as nonius lines, from the Latinized name of Pedro Nuñez, a 16th-Century Portuguese mathematician who invented an early form of the Vernier scale.*

<sup>15</sup> *Nonius is the latinized form of Nunes, the name of a portuguese mathematician, and pertains to a device at one time used in graduation instruments. The device was subsequently improved into the vernier.* (From Webster's New International Dictionary.) Ogle, K. (1964). *Researches in binocular vision.* New York: Hafner Publishing.

#### SOBRE O AUTOR

**Nuno Alexandre De Sá Teixeira** formou-se em Psicologia pela Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade de Coimbra, e doutorou-se em Psicologia Experimental pela mesma instituição. É investigador doutorado no Centro de Biomedicina Espacial da Universidade de Roma 'Tor Vergata', Itália, e no Instituto de Psicologia Cognitiva da Universidade de Coimbra.