

No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o Atrator, este é um espaço da responsabilidade do Atrator, relacionado com conteúdos interativos do seu site www.atractor.pt. Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para atractor@atractor.pt

FIGURAS QUE TREMEM

Quem já observou com atenção os guindastes que são usados nas obras, reparou por certo que os retângulos usados nas suas hastes compridas estão cheios de triângulos (ver figura 11), cuja função é contribuir para a rigidez da estrutura e impedir que ela se deforme intensamente ao levantar objetos pesados. Veremos neste texto como introduzir matematicamente as noções de estruturas rígida e trémula, começando por tratar a questão no plano para polígonos.

Dados um semiplano S com bordo horizontal r e um segmento $[AB]$ em r , comecemos por construir em S , para cada $n > 2$, um polígono com n lados, todos com o mesmo comprimento, tendo o segmento $[AB]$ como um dos lados (figura 1), e por ver, para cada valor de n , qual é o número de soluções deste problema.

Para $n = 3$, só há um triângulo que satisfaz as condições do problema; mas, para cada $n > 3$, há uma infinidade de soluções. Por exemplo, para $n = 4$, todos os losangos em S com lado $[AB]$ satisfazem essas condições; e são as únicas soluções, que em particular são pois todas convexas, pelo menos se na definição de polígono estiverem excluídos os casos degenerados. Se se aceitar que num polígono pode haver sobreposição de lados e que o polígono pode ter área nula, então haverá soluções não convexas para $n = 4$, como nos dois últimos exemplos da figura 2. Já para $n \geq 5$, há também soluções não degeneradas que não são convexas (ver figura 3).

Mais geralmente, se for fixado um lado num triângulo qualquer, então não podemos mover o vértice oposto, sem alterarmos o comprimento de pelo menos um dos dois lados adjacentes ao fixado. Já a situação é diferente para um quadrilátero qualquer não degenerado ou um polígono não degenerado com maior número de lados, que são sempre deformáveis¹ em polígonos com formas diferen-

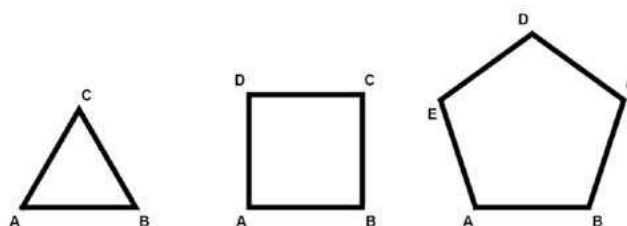


Figura 1.

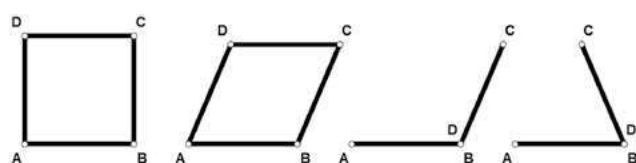


Figura 2.

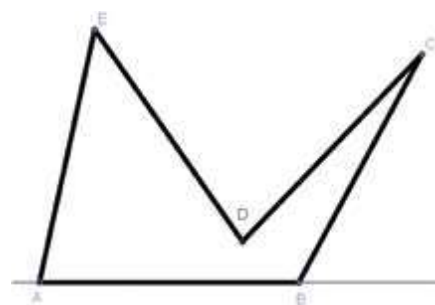


Figura 3.

tes, mantendo-se constantes os comprimentos de todos os lados durante a deformação.

Resulta do que foi dito que no caso de um triângulo $[ABC]$, mesmo não equilátero, não há em S nenhum triângulo $[ABC']$ diferente de $[ABC]$, cujos lados tenham comprimentos iguais aos correspondentes de $[ABC]$, embora, pensando nos lados como hastes de uma estrutura física, esta imobilidade do C parece por vezes ser posta em causa na prática. O leitor pode querer construir uma tal estrutura, com os meios de que dispuser². A figura 4 representa configurações que poderá reproduzir aproximadamente. Há, em cada uma das quatro situações representadas, três pares de barras ligadas, duas a duas, por orifícios nos extremos das barras. Numa, as três barras têm o mesmo comprimento e o triângulo obtido é equilátero, nas outras três o comprimento da haste horizontal fixa é o dobro do das outras duas hastes mais pequenas. Em três dos casos, essas ligações foram feitas por parafusos com porcas, mas não apertados demasiado, para não imobilizarem as duas hastes que eles ligam; no outro caso, o da direita em cima, o parafuso foi substituído por um pino que se ajusta³ um pouco melhor do que o parafuso ao orifício da haste.

Sem folgas, em cada um dos três últimos casos, as duas hastes mais pequenas deveriam estar alinhadas com a maior. O objetivo da experiência é tentar afastar, o mais possível, da barra horizontal fixa, o ponto em que as duas outras hastes estão ligadas. No triângulo equilátero, é completamente impercetível qualquer alteração de posição do ponto, mas nos outros três casos, aproveitando as pequeníssimas folgas existentes entre o orifício e o parafuso (ou pino), conseguem-se alguns desvios: a figura 4 representa os desvios máximos conseguidos. Comparem-se, em particular, as duas imagens da direita: é visível na de baixo um maior ângulo de cada uma das duas barras pequenas com a horizontal (quase o dobro do ângulo na

de cima), embora a diferença entre as folgas nos dois casos da direita seja só de 0,2 mm.

Isto significa que, na prática, o conhecimento aproximado dos comprimentos dos lados do triângulo permite, no caso de triângulos degenerados, formas bem diferentes umas das outras, embora tal não suceda no caso, por exemplo, do triângulo equilátero. Esta falta de rigidez de um triângulo degenerado $[ABC]$ como o que estamos a considerar está ligada ao facto de o comprimento dos lados mais pequenos $[AC]$ e $[BC]$ “não mudar significativamente”, quando C se desloca um pouco na vertical. Se encontrarmos uma definição precisa que traduza o sentido, *a priori* subjetivo, da parte destacada na frase anterior, teremos encontrado uma forma de definir matematicamente a rigidez.

Antes de fazermos essa tradução, analisemos uma situação concreta. Com as notações anteriores, consideremos em S o (único) triângulo $[ABC]$ equilátero de lado $[AB]$: está na figura 5 a preto e azul. Se L designar metade do comprimento de $[AB]$, a altura h_0 de C é dada por $\sqrt{3}L$. Aplicando a este triângulo uma deformação f que conserve imóveis A e B e desloque C na vertical com velocidade escalar, por exemplo, constante e igual a 1, o ponto $C' (= f(C, t))$ representado na mediatriz de $[AB]$ em S está à distância $\delta = t$ de C , para cima e o triângulo $[ABC']$, isósceles, tem lados $[AC']$ e $[BC']$ com comprimentos ligeiramente maiores do que $2L$. O comprimento (comum) de $[AC']$ e $[BC']$ é dado pela função g definida por $g(h) = \sqrt{L^2 + h^2}$, em que $h = h_0 + \delta$ representa a altura de C' e, portanto, o aumento do comprimento, relativamente ao de $[AC]$, é

$$\begin{aligned} \epsilon &= g(h_0 + \delta) - g(h_0) = \sqrt{L^2 + (h_0 + \delta)^2} - \sqrt{L^2 + h_0^2} \\ &= \sqrt{L^2 + (h_0 + \delta)^2} - 2L. \end{aligned}$$

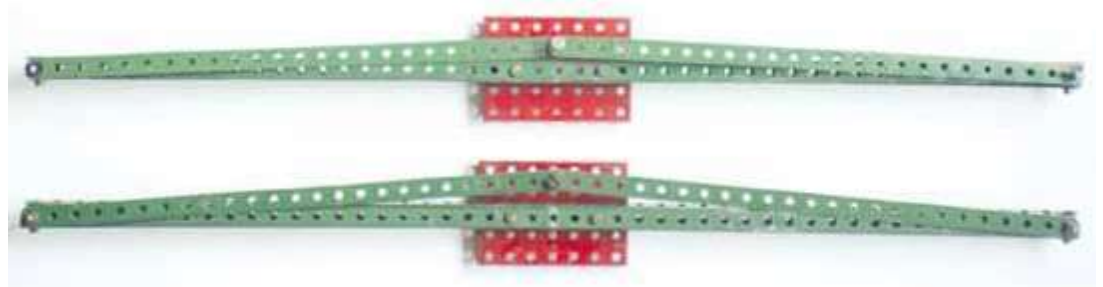
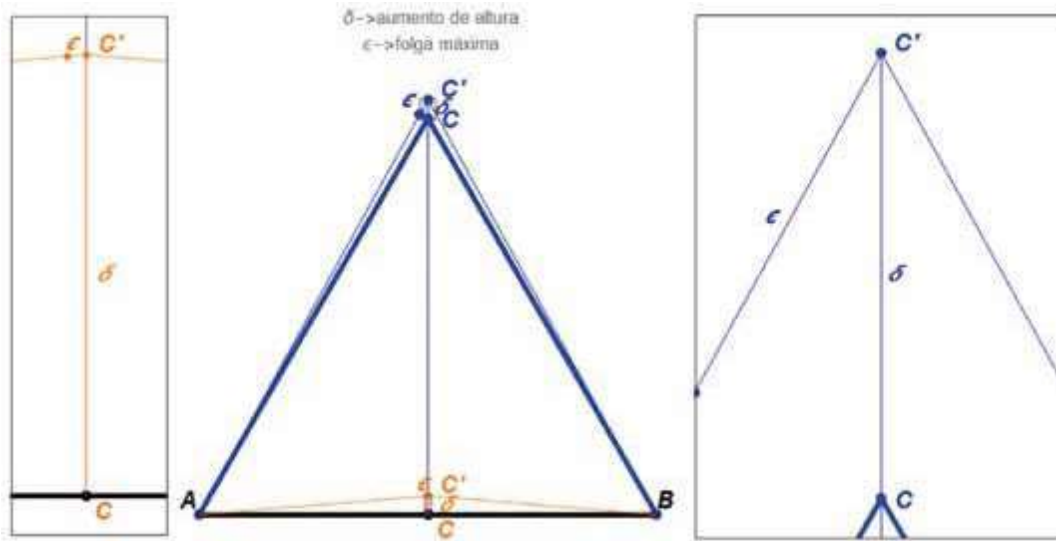
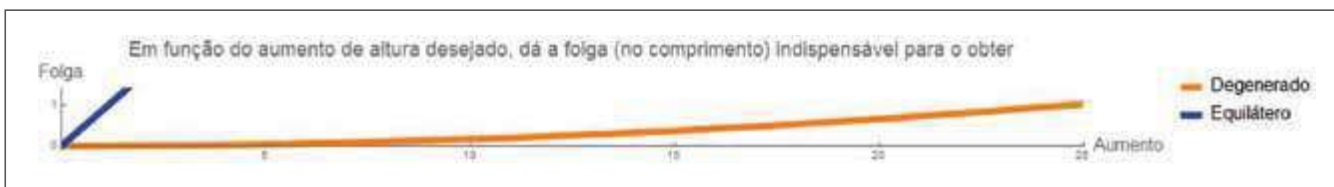


Figura 4.



◀ Figura 5.

▼ Figura 6.



Na figura 5, está marcado no segmento $[AC']$ o ponto que dista de A o mesmo que C , sendo, pois, ϵ a distância desse ponto a C' .

Na mesma figura está também representado (a preto e laranja) o que se passa quando se parte de um triângulo degenerado em vez de um equilátero. Nas fórmulas indicadas, há agora que substituir h_0 por 0. O comprimento de $[AC']$ e $[BC']$ é agora $\sqrt{L^2 + \delta^2}$ e, portanto, o aumento ϵ do comprimento, relativamente ao correspondente a $h_0 = 0$ é $\sqrt{L^2 + \delta^2} - L$.

Para uma comparação mais clara entre os valores de δ , correspondentes à deslocação de C para cima (até C') e os da folga ϵ que permitem os aumentos dos comprimentos, foram incluídas na figura 5, dos dois lados, ampliações de partes da imagem central, a da esquerda para o triângulo degenerado e a da direita para o equilátero. Nota-se que, no caso degenerado, o aumento de comprimento ϵ é insignificante, quando comparado com o aumento de altura δ . O mesmo não acontece no caso do triângulo equilátero, em que δ e ϵ são da mesma ordem de grandeza.

A figura 6 mostra os gráficos da função $\epsilon(\delta)$ nos dois casos considerados, tomando 610 mm como comprimento de $[AB]$, que é o do modelo usado. No caso do triângulo

degenerado, para obter um aumento da altura do ponto C de cerca de 25 mm, basta uma folga de cerca de 1 mm, ao passo que no caso de um triângulo equilátero com a mesma base, a mesma folga permite um aumento de altura de pouco mais de 1 mm.

¹ Dado um polígono F no plano P , designando por V o conjunto dos vértices de F e A o das arestas, definimos deformação de F em P como uma função contínua f de $V \times [0, 1] \rightarrow P$, tal que, para todo o vértice R em V , $f(R, 0) = R$. Para cada t , pondo $f_t(R) = f(R, t)$, $V_t = f_t(V)$ e, para cada aresta $a = [R, S]$ de F , $a_t = [R_t, S_t]$, A_t designa o conjunto dos segmentos a_t , para a em A . O polígono F_t é definido como o polígono com vértices V_t e arestas A_t . Dependendo do contexto, pode-se exigir que, para cada $t \in [0, 1]$, a função $f_t : x \rightarrow f[x, t]$, satisfaça condições suplementares, como, por exemplo, que seja de classe C^1 e injetiva. Suponhamos ainda que para cada vértice R tal que a função $t \rightarrow f[R, t]$ não seja constante, ela tem derivada não nula em $t = 0$. Ver em [1] exemplos interativos de deformações de polígonos. Uma deformação diz-se trivial se, para cada x em V , a função $t \rightarrow f_t(x)$ for constante.

² Se tiver acesso a um jogo do tipo *Meccano*, pode inspirar-se na figura 4 (lado esquerdo ou direito, conforme a época em que esse *Meccano* tiver sido adquirido), caso contrário, poderá usar três tiras de alumínio ou de PVC fino, em cada uma das quais terá de furar dois buracos.

³ Os diâmetros dos orifícios, parafusos (e pinos) usados nas hastes das fotografias são: plástico 10,4 mm e 10,2 mm; outros: 4,3 mm, 3,6 mm (e 3,8 mm); as folgas são, pois, de 0,2 mm no caso plástico e 0,7 mm (e 0,5 mm) nos outros. Em todos os casos os diâmetros foram medidos com uma craveira com nónio e têm erro inferior a 0,1 mm.

O leitor já terá notado que o limite do quociente $\epsilon/\delta = (g(h_0+\delta)-g(h_0))/\delta$ quando δ tende para 0 é o valor $g'(h_0)$ da derivada da função g no ponto h_0 (notar que δ é igual a t por termos suposto a velocidade escalar do movimento de C constante e igual a 1). E, precisamente, esse valor $h_0/\sqrt{L^2+h_0^2}$ é 0 se $h_0 = 0$ (caso degenerado, a laranja) e é diferente de 0 (mais precisamente é $\sqrt{3}L/(2L) = \sqrt{3}/2 \cong 0,866$) se $h_0 = \sqrt{3}L$ (caso equilátero, a azul).

Em conclusão, o triângulo degenerado $[ABC]$, em que C é o ponto médio de $[AB]$, tem as duas propriedades a seguir enunciadas. Fixada uma aresta $[AB]$,

- ▶ não há nenhuma deformação (não trivial) do polígono, que deixe o lado $[AB]$ fixo e conserve todos os comprimentos dos lados;

- ▶ existe uma deformação (não trivial) do polígono, que deixa a aresta $[AB]$ fixa e tal que, para cada aresta a , a função $t \rightarrow \text{comprimento de } a_t$ tem derivada nula em $t = 0$.

Chamaremos trémula a uma configuração que satisfaça estas duas condições. E diremos que uma configuração é rígida se satisfizer a primeira mas não a segunda.

O leitor poderá verificar que:

- ▶ o quadrado é deformável (por losangos), portanto não satisfaz a primeira condição, não sendo pois rígido nem trémulo (é flexível);

- ▶ qualquer triângulo não degenerado é rígido;

- ▶ qualquer polígono que não satisfaça a primeira condição satisfaz necessariamente a segunda, porque há uma deformação não trivial, em que as funções comprimento de cada lado são constantes.

Visto em detalhe o caso dos polígonos no plano, vamos agora alargar as definições ao caso de poliedros no espaço. O “análogo” de um triângulo equilátero no plano, figura rígida por excelência, é um tetraedro (poliedro regular com quatro faces que são triângulos equiláteros). E o que é que será o análogo ao quadrado e ao losango? Consideremos um cubo. Será deformável continuamente, como é o quadrado? A resposta depende do que exigirmos que se mantenha durante a deformação. No caso do quadrado no plano, queríamos que os comprimentos dos lados se mantivessem constantes durante a deformação (ou, o que é equivalente, que as distâncias entre vértices consecutivos do polígono se mantivessem constantes). No caso do cubo, há duas escolhas possíveis a fazer para uma deformação do poliedro: i) a mais fraca, exigindo que

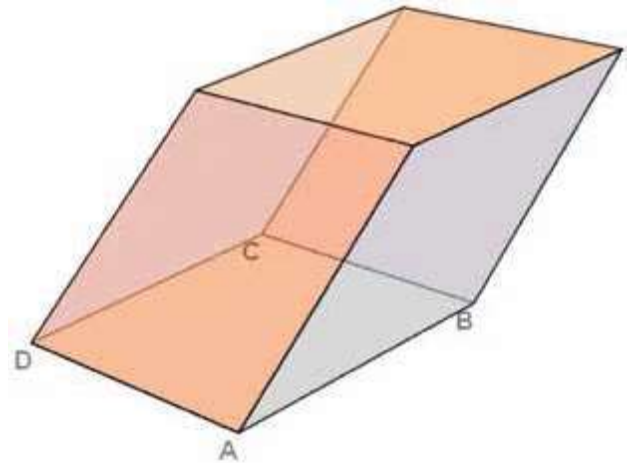


Figura 7.

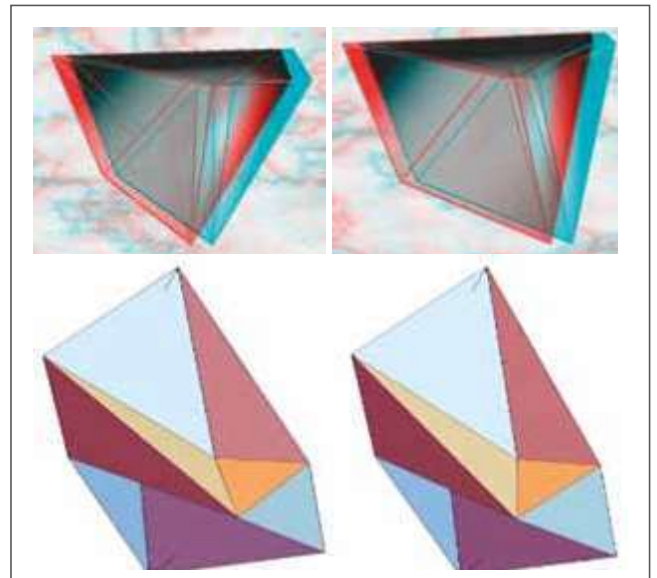


Figura 8.

as distâncias entre vértices consecutivos de cada face se mantenham constantes, ou, o que é equivalente, que os comprimentos de todas as arestas do poliedro permaneçam constantes; ii) outra, exigindo que, para cada face, as distâncias entre quaisquer dois dos seus vértices se mantenham constantes, o que equivale a impor que, durante a deformação, cada face se mantenha isométrica à de partida. A figura 7 mostra uma fase na deformação do cubo que satisfaz a primeira condição e não a segunda: as faces não horizontais que contêm as arestas $[AB]$ e $[CD]$ são losangos não quadrados e as restantes quatro são quadrados. Para um poliedro que só tenha faces triangulares, as duas condições (i) e (ii) coincidem.

Um poliedro é dito flexível se existir uma deformação

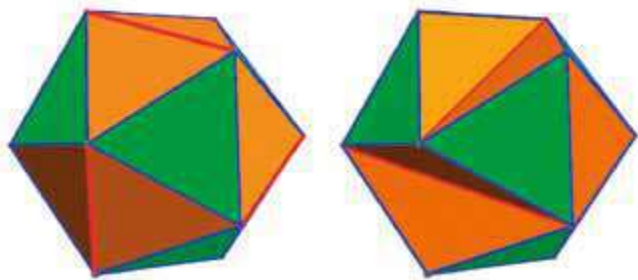


Figura 9.

não trivial que fixe uma face e satisfaça a condição mais forte (ii). Cauchy provou, em 1813, que nenhum poliedro convexo (não degenerado) é flexível (o argumento pode ler-se em [2]). Durante 164 anos, esteve em aberto o problema de saber se haveria ou não poliedros (sem auto interseções) flexíveis não convexos. Uma resposta afirmativa foi dada em 1977 por Connelly, tendo sido exibido um exemplo⁵ de um tal poliedro em que todas as faces são triangulares. A figura 8 mostra fases na deformação⁶ de um poliedro definido por Steffen, baseado no de Connelly, mas com menor número de faces, tendo sido provado mais tarde que nenhum outro existe com ainda menor número de faces.

A definição de poliedro trémulo é semelhante à usada no caso dos polígonos no plano. Diremos que o poliedro é trémulo se

▶ não for flexível;

▶ houver uma deformação (não trivial) do poliedro, tal que, para cada aresta a , a função $t \rightarrow \text{comprimento de } a(t)$ tem derivada nula em $t = 0$

e o poliedro é rígido se satisfizer a primeira condição e não a segunda.

O leitor poderá verificar que:

▷ já foi visto um exemplo de um poliedro flexível, mas, contrariamente ao caso dos polígonos no plano, não é um exemplo elementar;

▷ uma pirâmide triangular degenerada, por exemplo, com um triângulo equilátero por base e em que o vértice “oposto” é o centro da base, constitui um exemplo trivial de um poliedro trémulo;

▷ qualquer poliedro flexível satisfaz a segunda condição.

A figura 9 ajuda a ver como se pode definir um exemplo de um poliedro trémulo não degenerado, devido a

Jessen. Partindo dos vértices de um icosaedro regular⁷, fazemos escolhas de pares de faces contíguas pela forma indicada na imagem da esquerda (faces não verdes) e substituímos cada um desses pares por um par reentrante de triângulos isósceles, mantendo-se o conjunto de vértices inalterado (imagem direita), embora, claro, as novas arestas a vermelho tenham comprimentos diferentes das primitivas. Aplica-se ao poliedro uma deformação que conserve os comprimentos das arestas a vermelho, e que se traduza na diminuição, com velocidade constante, da distância entre os vértices dos diedros reentrantes que não pertencem às (novas) arestas vermelhas, até terem o valor final 0, caso em que os triângulos isósceles referidos se identificam dois a dois. Escolhido um vértice V_0 e uma face verde à qual ele pertença, se essa deformação mantiver fixo V_0 e conservar as direções das arestas dessa face às quais pertence V_0 , a deformação fica perfeitamente determinada. Note-se que os comprimentos das arestas (a azul), bordos das faces (verdes), não permanecem constantes durante a deformação, embora se conservem iguais entre si. A figura 10 mostra os gráficos de várias funções, relacionadas com esta deformação, que termina num poliedro degenerado do qual só ficam visíveis as faces verdes, que ocupam as posições de um octaedro regular. Essa figura 10 permite observar que há um valor⁸ de t para o qual ambas as funções comprimento têm derivada 0. Da família de poliedros representados por esta deformação só se pode concluir que é trémulo o correspondente a esse valor do parâmetro de deformação, e não todos os outros, como por vezes é afirmado. Para esse valor do parâmetro

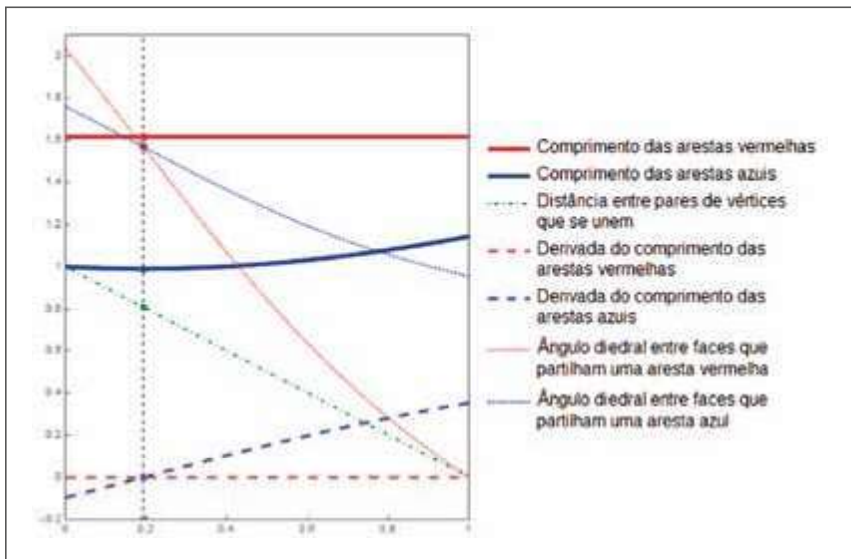
⁴ Com a escolha feita, esse valor é o módulo da derivada de $t \rightarrow f(C, t)$ em 0. Claro que, se tivéssemos escolhido uma deformação f em que a velocidade escalar do movimento $t \rightarrow f(C, t)$ na origem fosse diferente de 1, o limite de f seria diferente do módulo da derivada em 0 de f relativamente a t , mas o anulamento de um equivaleria ao anulamento do outro, precisamente devido à condição extra imposta na definição de deformação.

⁵ Um exemplo de um poliedro flexível com auto interseções tinha sido dado por Bricard 80 anos antes.

⁶ O par de imagens pequenas, mais a baixo, permite visão estereoscópica aos leitores que consigam “juntar visualmente” as duas imagens numa só. O par de cima pode ser visto com óculos anáglifos. Um modelo em cartão foi construído para a “Exposição Matemática Viva”, criada pelo Atractor, e que esteve cerca de dez anos em exibição no Pavilhão do Conhecimento. Modelos virtuais interativos em visão mono ou estereoscópica podem ser vistos em [1].

⁷ Uma escolha de vértices de um tal poliedro pode ser a seguinte: $(0, \phi/2, 1/2)$, $(0, -\phi/2, 1/2)$, $(0, \phi/2, -1/2)$, $(0, -\phi/2, -1/2)$, $(\phi/2, 0, 1/2)$, $(-\phi/2, 0, 1/2)$, $(\phi/2, 0, -1/2)$, $(-\phi/2, 0, -1/2)$, $(\phi/2, 1/2, 0)$, $(-\phi/2, 1/2, 0)$, $(\phi/2, -1/2, 0)$, $(-\phi/2, -1/2, 0)$, em que ϕ designa o número de ouro.

⁸ Esse valor é $1 - \phi/2 \cong 0,19$, ϕ designando o número de ouro.



◀ Figura 10.

▼ Figura 11.



em que o poliedro é trémulo, o ângulo diedral (variável) reentrante é $\pi/2$. O poliedro trémulo correspondente é conhecido por icosaedro ortogonal de Jessen.

A figura 11 representa uma pequena porção da parte superior de um guindaste, que põe em evidência o uso da rigidez dos triângulos para reforçar estruturas com outras formas. Nessa figura é possível observar como: i) em cada uma das quatro faces (retangulares) da enorme coluna vertical (de secção quadrada), de que apenas é mostrada uma pequena parte de cima, há triângulos equiláteros, que dão rigidez a essa coluna; ii) em cada uma das duas faces laterais da grande haste horizontal (de secção triangular), há novamente triângulos equiláteros com o mesmo objetivo; iii) finalmente, os cabos de aço que permitem o suporte da haste horizontal do lado direito, equilibrada por grande massa do lado esquerdo, formam também na parte direita da imagem um grande triângulo; e na parte esquerda, há uma curiosa estrutura formada por dois triângulos (a amarelo) e um outro (a amarelo e preto) com os cabos de aço e uma haste cinzenta retangular quase ver-

tical, ela mesma também triangulada, que permitem uma boa rigidez. Este é um exemplo convincente do uso que os engenheiros mecânicos fazem das noções que tratámos acima. Mas outros exemplos poderiam ser dados ligados à construção, bem conhecidos dos engenheiros civis.

REFERÊNCIAS

[1] www.atractor.pt/mat/tremulos

[2] M. Aigner, G. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer-Verlag, 2009.

⁹ Feitas as contas para o ângulo diedral reentrante α em função do parâmetro de deformação t , obtém-se $tg[\alpha/2] = (1-t)/(t-\phi+1)$. No caso ortogonal, ficará $1=(1-t)/(t-\phi+1)$, ou seja $t = 1-\phi/2$. Portanto, a posição trémula é precisamente aquela em que o ângulo diedral reentrante é reto. Acontece que todos os outros ângulos diedrais (não reentrantes) são também retos nessa fase da deformação.