FABIO CHALUB
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

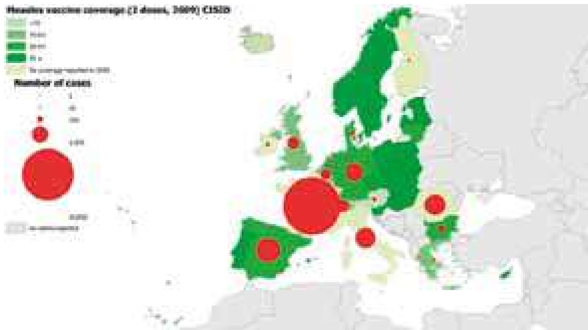
A MATEMÁTICA QUE PREVINE DOENÇAS

O ano de 2017 foi cheio de tragédias, uma se sobrepondo a outra. Já quase não nos lembramos da epidemia de sarampo, que depois de uma pausa de vários anos voltou a matar em Portugal. Epidemias graves, de uma doença que se julgava extinta, também ocorreram noutras regiões do globo. A quase-extinção foi obra de um esforço coletivo, onde um conceito matemático teve um papel central: *a imunidade de grupo*.

Não há dúvida de que a grande tragédia de 2017 foi a sucessão de mortes causadas pelos incêndios. Tão graves que nos fizeram esquecer o infortúnio anterior: uma morte causada por sarampo, algo que não acontecia desde há vários anos em Portugal. E o nosso canto da Europa não esteve só. Casos despontaram um pouco por todo o Velho Mundo, com particular gravidade na Roménia. Os Estados Unidos também não ficaram de fora, com um foco na Califórnia, bem no lugar onde as crianças de todo o mundo se encontram: a Disneylândia em Los Angeles. Ver figura 1.

O foco português iniciou-se a partir do internamento de um bebé de 13 meses que não havia sido vacinado e que desenvolveu a doença. Apesar de a primeira dose dever ser dada aos 12 meses, é natural que haja atrasos. Este doente contaminou diversos outros pacientes e trabalhadores, incluindo uma adolescente não vacinada que faleceu devido à conjugação do sarampo com uma pneumonia. Alegadamente, a rapariga tinha tido fortes reações alérgicas a outras vacinas e, em virtude da virtual extinção da doença, os pais, sob recomendação médica, resolveram não a vacinar [1].

Esta história envolve três grupos não vacinados que serão relevantes para a nossa discussão. O bebé, que era muito novo para receber a vacina; uma pessoa com alergia, que portanto não pode ser imunizada; adultos que não receberam as suas doses na idade que hoje é recomendada (a vacina só foi introduzida no Plano Nacional de Saúde em 1992).



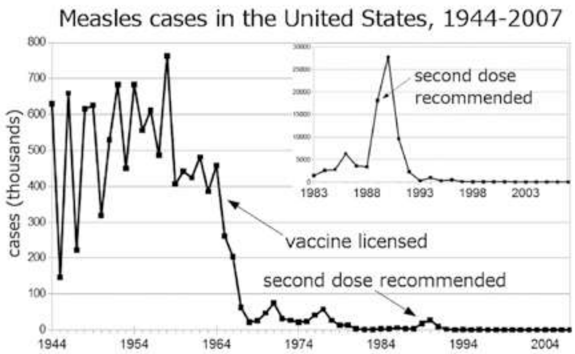
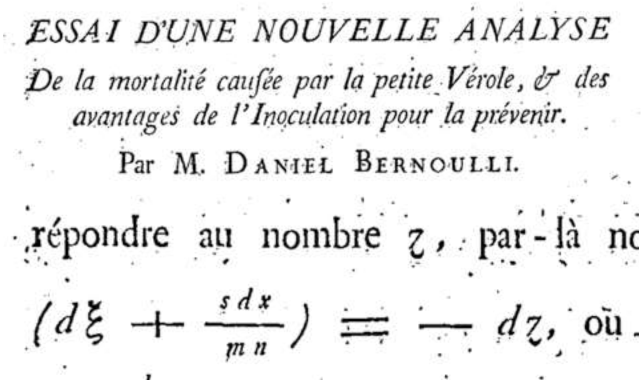


Figura 1. **Em cima:** Fração da população vacinada e número de casos na Europa. Veja a nítida correlação entre estas duas variáveis. Fonte: *https://www.vaccinestoday.eu/* **Em baixo:** Número de casos, ano a ano, nos Estados Unidos. Veja a correlação entre a introdução da vacina e o quase desaparecimento da doença. Infelizmente, a correlação também funciona no sentido inverso, quando houve no Reino Unido uma *fake news* relacionando vacinas e autismo, levando a um rápido aumento do número de casos. **Fonte: Wikipedia.**


ESSAI D'UNE NOUVELLE ANALYSE
De la mortalité causée par la petite Vérole, & des avantages de l'Inoculation pour la prévenir.
Par M. DANIEL BERNOULLI.

répondre au nombre z, par-là no

$\left(d\xi + \frac{s\,dx}{mn}\right) = -dz$, où

Figura 2. Trabalho original de D. Bernoulli, no qual estuda a dinâmica da varíola e os efeitos da variolação, utilizando equações diferenciais (no detalhe).

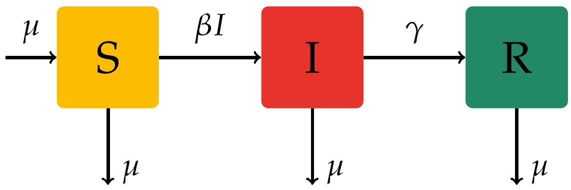


Figura3. O modelo SIR, numa formulação particularmente simples: As pessoas nascem **S**uscetíveis e morrem com uma taxa μ (a mortalidade independe do estado do indivíduo, ou seja, a doença não é mortal e supomos igual à taxa de nascimento por normalização – ou seja, supomos a população constante), são contaminadas de forma proporcional ao numero de indivíduos na classe **I**nfecciosa e, depois de um certo tempo característico, adquirem imunidade permanente, ficando até o fim da vida na classe **R**ecuperada. Se a imunidade for temporária, uma seta ligará **R** e **S**. A vacinação de adultos é representada por uma transição entre **S** e **R**, enquanto que a vacinação infantil é representada por uma parcela da população que já é **R** ao nascer. Escrevemos uma equação diferencial para cada classe, por exemplo, $S' = \mu - \mu S - \beta IS$, $I' = \beta IS - \mu I - \gamma I$, etc.

Quando cerca de 95% da população está imunizada contra o sarampo, o vírus para de circular e todos ficam protegidos. É o que se chama de *imunidade de grupo*. De facto, a ideia de que não é necessário imunizar cada uma das pessoas na face da Terra é crucial para que as campanhas de vacinação façam sentido, do ponto de vista da saúde pública. É isto que vamos discutir hoje.

O estudo matemático das vacinas é tão longo quanto as próprias vacinas. Antes de a primeira ter sido criada pelo médico inglês Edward Jenner, uma técnica chamada *variolação*, usada tradicionalmente no Oriente, começara a ser introduzida na Europa. Esta consistia em aplicar um pouco de material infeccioso da varíola em crianças saudáveis. A técnica não era desprovida de risco: poderia vir a ser desenvolvida uma infeção grave. Esta, no entanto, não era a situação mais comum. Em geral, havia uma infeção moderada que não deixava sequelas, da qual resultava uma imunidade permanente.

O conhecido matemático Daniel Bernoulli resolveu enfrentar a questão, levantada por um seu colega, sobre como comparar as vantagens a longo prazo da variolação em massa contra os riscos imediatos. Assim, fez o primeiro uso de equações diferenciais no estudo da dinâmica populacional [2]. Veja a figura 2, e também a referência [3], de onde tirámos parte das histórias abaixo.

Passaram-se mais de 100 anos, até que, no final do século XIX, o médico britânico nascido na Índia Ronald Ross resolveu dedicar-se ao estudo da malária [4]. Esta é em tudo diferente da varíola: causada por um parasita, em vez de vírus; não se transmite pessoa-a-pessoa, mas sim através do mosquito, o chamado *vetor* da doença. Por curiosidade, a palavra *vetor*, muito utilizada de forma distinta em matemática, significa *o que transporta*. De facto, quando Ross percebeu que a doença era transmitida pelo mosquito, foi tomado por uma ideia revolucionária: seria possível eliminar a doença reduzindo, mesmo sem eliminar, o número dos seus transmissores. Esta ideia foi recebida com ceticismo pelos seus contemporâneos, e Ross dedicou-se a modelar o problema matematicamente. Com isto concluiu que existe um parâmetro, a que hoje chamamos de *fator reprodutivo básico*, ou $\mathcal{R}_0$, que é capaz de prever a dinâmica a longo prazo da doença. Grosso modo, $\mathcal{R}_0$ indica a quantidade de infecções secundárias gerada por um único indivíduo infeccioso numa população totalmente suscetível. Se este número for menor do que um, então o número de doentes vai diminuir no tempo e a doença tende a desaparecer. Assim, dizemos que o estado livre de doença é estável.

Por outro lado, se $\mathcal{R}_0 > 1$, então o número de doentes tende a aumentar até que a diminuição do número de novas pessoas que possam ficar doentes (as que já se curaram gozam de imunidade) faz com que a doença pare de se expandir e atinja o equilíbrio endémico.

Portanto, o objetivo das intervenções não precisa de ser o de eliminar completamente o mosquito, ou seja, impedir totalmente a transmissão da doença, mas sim fazer com que cada doente infecte, em média, menos de uma pessoa. Desta forma, naturalmente a doença irá desaparecer.

Esta ideia ganhou força quando o médico escocês Anderson Gray McKendrick e o químico William Ogilvy Kermack criaram o que hoje é conhecido como o modelo SIR. Cada indivíduo pode estar num dos três estados: **S**uscetível, **I**nfeccioso ou **R**ecuperado. Este último indica pessoas com imunidade (que pode ser parcial ou permanente). Fornecendo os parâmetros para todas as transições possíveis entre os diversos estados, encontramos uma expressão explícita para o $\mathcal{R}_0$, e isto permite compreender exatamente quais as intervenções necessárias para o tornar menor do que 1. Veja a figura 3.

A vacinação pode ser entendida dentro deste esquema: se for vacinação de adultos, então uma fração dos suscetíveis é transformada a cada unidade de tempo em recuperados; para o caso da vacinação de crianças, colocamos os recém-nascidos em parte na classe **S** e em parte na classe **R**.

Neste modelo, temos que $\mathcal{R}_0$ é função de v, a taxa de vacinação da população, e existe um valor crítico v_0 tal que para $v > v_0$ a doença desaparece, enquanto para $v < v_0$ restará sempre uma fração de doentes na população. Se tivermos $v_0 < 1$, concluímos que não é necessário vacinar todos. Desta forma, o desaparecimento da doença acaba por proteger também aqueles que não podem ser vacinados, seja por serem muito jovens, seja por terem alergia a algum dos componentes. Mas protege também aqueles que decidem não vacinar, com base em informações falsas, teorias de conspiração, crenças metafísicas peculiares ou apenas por puro egoísmo.

Evidentemente, não cabe aos matemáticos – nem aos médicos, diga-se – decidir se as vacinas devem ou não ser obrigatórias. A sociedade está mais bem servida num modelo democrático. Mas cabe, certamente, aos que dominam as questões técnicas chamar a atenção para o facto de que vários países já conseguiram eliminar o sarampo e perguntar: "Porque é que a Europa não consegue?"

REFERÊNCIAS

[1] *https://www.publico.pt/2017/07/05/sociedade/noticia/fim--da-epidemia-de-sarampo-em-portugal-1778030*

[2] Bernoulli, D. *Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir.* Hist. Acad. R. Sci. Paris, 1-45 (1760/1766).

[3] Nicolas Bacaër. *Histoires de mathématiques et de populations*. Ed. Cassini, Paris, 2009.

[4] Ross, R. *The Prevention of Malaria*, 1st edn. John Murray, London (1910).