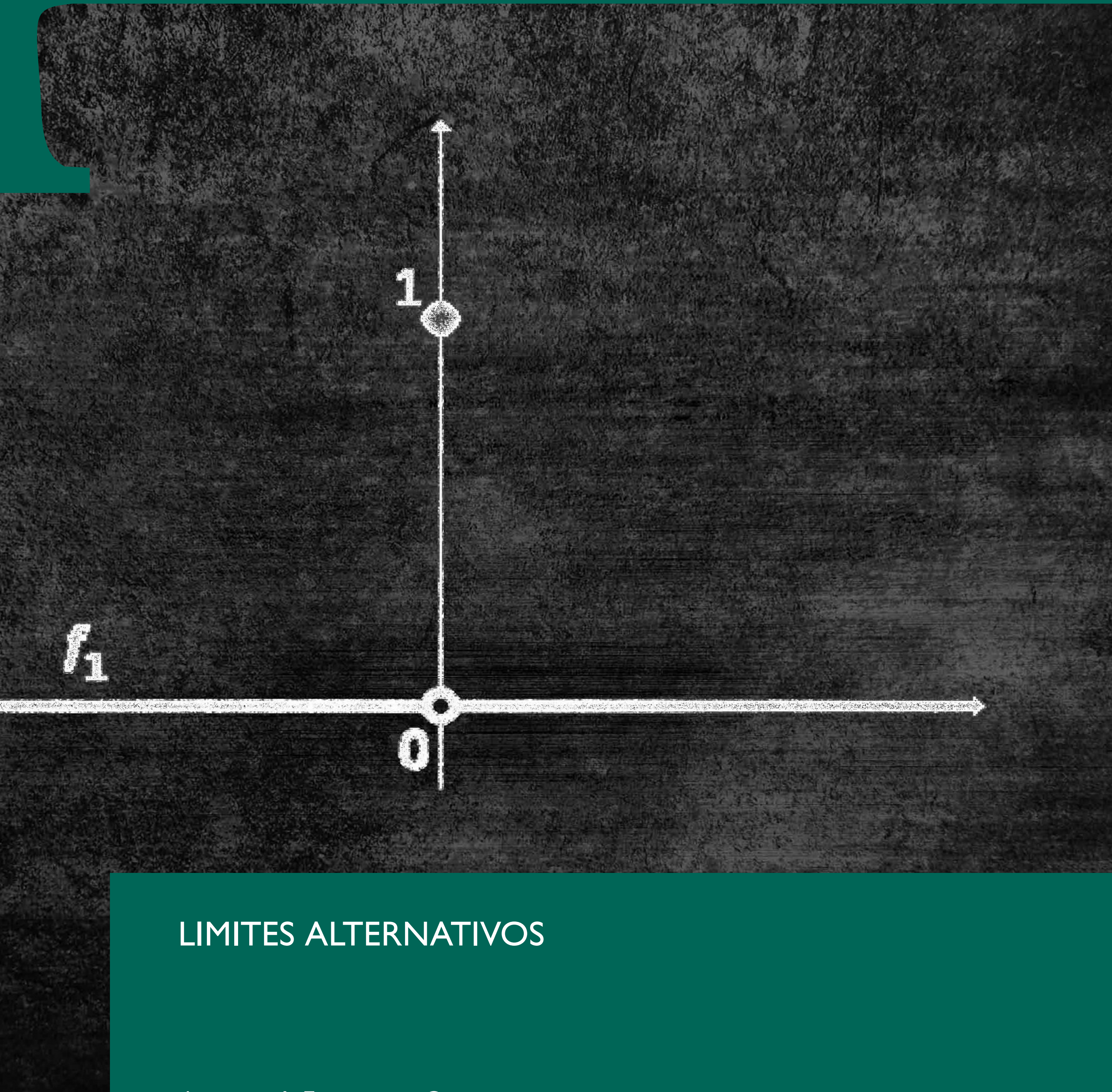

LIMITES ALTERNATIVOS

Augusto J. Franco de Oliveira
Professor Emérito - Universidade de Évora
ajfrancoli@gmail.com

Tendo como motivo próximo as recentes alterações aos programas de Matemática A do 11.º ano de escolaridade, no que concerne a noção de limite de uma função num ponto, fazemos uma descrição das duas principais definições dessa noção, suas propriedades básicas e relacionamento entre elas, e terminamos com uma crítica às mudanças postas em prática, quer no conteúdo quer nos procedimentos que levaram à sua adoção.

1. INTRODUÇÃO

Os alunos e professores de matemática do 11.º ano de escolaridade depararam-se no ano letivo 2016/17, pela primeira vez, com a seguinte situação: a função real $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

não tem limite quando $x \to 0$ (fig. 1). Como é isto possível? Então $f_1(x)$ não se aproxima de 0 tanto quanto se queira para x suficientemente próximo de 0 (mas diferente de 0)?[1] A existência de limite num ponto não devia ser independente do valor da função nesse ponto?

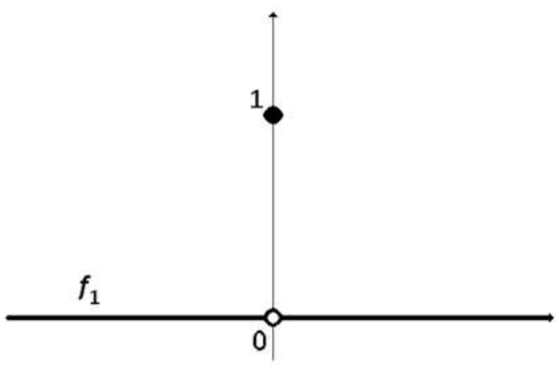

Figura 1.

Mas a restrição de f_1 a $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $g = f_1 \upharpoonright \mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $g(x) = 0$ para todo $x \neq 0$ em $\mathbb{R}$, já possui limite quando $x \to 0$, e o limite é, naturalmente, 0:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0.$$

Por outro lado, também poderá constatar que a função f_2 de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f_2(n) = 1$ é contínua em todos os pontos do seu domínio!

Não há contradição alguma à vista, o que há é uma "nova" noção de limite de uma função real de variável real num ponto, adotada nos novos programas e metas curriculares de Matemática A para o ensino secundário que resultaram da revisão curricular iniciada em 2011 (ver [NPM]).

Duas questões se nos colocam com pertinência a propósito da mudança:

1) A racionalidade da mudança;
2) A maneira como foi efetuada.

Antes de discutir estas questões, fazemos um resumo da matemática que está em causa, nomeadamente, das noções de limite e principais consequências num contexto elementar de funções reais de variável real, isto é, funções com domínio contido em $\mathbb{R}$ e valores em $\mathbb{R}$. Como é natural, este texto destina-se a todas as pessoas interessadas no ensino das matemáticas nas nossas escolas e, em especial, aos professores de matemática do secundário.[2]

2. DUAS NOÇÕES DE LIMITE DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO

Pode dizer-se que a Análise Matemática é a área das matemáticas onde mais se utilizam sistematicamente diversas noções de proximidade e convergência. No ensino elementar a convergência de sucessões é tratada antes da convergência de funções em geral, e esta pressupõe aque-

[1] Evitar a imiscuidade desta interpretação "cinemática" na conceção rigorosa de limite de uma função num ponto foi precisamente um dos objetivos de Weierstrass (lições em Berlim, 1861) com a sua definição (δ, ε), mas nem por isso aquela interpretação perdeu estatuto como motivação intuitiva até ao presente. Sebastião e Silva, no *Compêndio de Matemática*, 2.º vol. (1976), pp. 129-131, referindo-se à expressão "$f(x)$ aproxima-se de b, quando x se aproxima de a" (subentendendo por valores "*todos distintos de a*", p. 131) comenta: "Esta intuição de carácter dinâmico é muito valiosa e convém, por isso, mantê-la sempre viva no espírito (...). Mas, em matemática, não basta a intuição: é preciso definir os conceitos com *rigor lógico*, para podermos sobre eles raciocinar com inteira segurança."

[2] A presente versão incorpora as correções das várias gralhas, lapsos e sugestões diversas assinaladas pelo revisor (anónimo) do artigo, que agradeço.

la. Por sua vez, por uma questão de sensibilidade ao preceito pedagógico de caminhar do particular para o geral, sempre que possível, em muitos manuais elementares e universitários (por exemplo, Bartle *1964*), a continuidade é tratada antes dos limites de funções, mas não tem de ser necessariamente assim.

Começamos por dar duas definições ligeiramente diferentes do limite de uma função num ponto e depois trataremos da relação entre elas e da sua extensão. Para facilitar as comparações, adotaremos o mais possível a forma e as notações dos programas acima referidos.

Salvo aviso em contrário, f será sempre uma função com domínio $D = D_f$ contido em $\mathbb{R}$ e valores em $\mathbb{R}$. Recordamos algumas noções topológicas básicas.

(1) Uma vizinhança de um número real c é um conjunto de números reais V contendo algum intervalo aberto com centro em c, isto é, tal que, para algum $\varepsilon > 0$, $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subseteq V$.

(2) Uma sucessão de números reais $\langle x_n \rangle = \langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ converge para um número real c, e escreve-se $x_n \to c$, sse para todo o $\varepsilon > 0$ existe uma ordem k a partir da qual $|x_n - c| < \varepsilon$. [3]

(3) Um número real c é um ponto de acumulação de D se em toda a vizinhança de c há pontos de D diferentes de c. Equivalentemente, existe uma sucessão de pontos de D diferentes de c convergente para c. Resulta imediatamente que em toda a vizinhança de um tal ponto há infinitos pontos de D.

(4) Um número real c é um ponto aderente a D se em qualquer vizinhança de c há pontos de D, ou, equivalentemente, existe uma sucessão de elementos de D convergente para c. Note-se que c pode pertencer ou não a D. Se $c \in D$, pode não haver mais nenhum ponto de D numa vizinhança de c – neste caso, c é um ponto isolado de D, mas não deixa, por isso, de haver uma sucessão de pontos de D convergente para c: a sucessão constante $\langle x_n \rangle$, com $x_n = c$ para todo o n.

Observe-se ainda que todo o ponto de acumulação de D é ponto aderente a D, mas não reciprocamente. Por exemplo, se $D = \{0\}$, então 0 é aderente a D mas não é ponto de acumulação de D.

Indicamos, pois, as duas noções de limite de uma função num ponto com que vamos lidar até ao final deste artigo.

2.1 Definição. Seja c um ponto de acumulação do domínio D de f. Um número real b diz-se o limite em ponto excluído (ou simplesmente limite excluído) de f em c sse para cada vizinhança V de b existe uma vizinhança U de c tal que para todo o x, se $x \in U \cap D$ e $x \neq c$, então $f(x) \in V$. Neste caso, escrevemos

$$(2.1) \qquad b = \mathrm{lime}_{x\to c} f(x).$$

Aquilo que é "excluído" é simplesmente a consideração do ponto c nas "aproximações" de x a c. [4]

2.2 Definição. Seja c um ponto aderente ao domínio D de f. Um número real b diz-se o limite (em ponto) incluído de f em c sse para cada vizinhança V de b existe uma vizinhança U de c tal que para todo o x, se $x \in U \cap D$, então $f(x) \in V$, isto é, $f[U \cap D]$. Neste caso, escrevemos

$$(2.2) \qquad b = \mathrm{limi}_{x\to c} f(x).$$

2.3 Observações.

1. Obviamente, só podemos comparar as duas definições de limite em pontos de acumulação do domínio da função. Neste caso, observa-se que a diferença entre elas se centra no facto de o valor $f(c)$, quando existe, ser considerado ou não. Na primeira, def. 2.1, não interessa considerar o valor *f(c)*, caso exista; note-se que c pode pertencer ou não a D_f.

2. Observe-se também a distinção de notação nas equações (2.1) e (2.2). Deve-se perceber que a grande maioria dos autores apresenta apenas uma dessas noções, caso em que se refere a ela apenas como "o limite", e geralmente emprega a notação "$\lim_{x\to c} f(x)$". O problema é que, conforme o autor, ou estamos a referir-nos à noção 2.1 (lime) ou a 2.2 (limi), e isto tem de ser absolutamente claro desde o princípio. Raros são aqueles que se referem às duas noções, e mais raros ainda os que desenvolvem a questão das propriedades e comparação entre elas.

Está neste último caso Robert G. Bartlet, *The Elements of Real Analysis*, 1964, que estamos a seguir neste artigo (com adaptações).

3. Atendendo a que o leitor está provavelmente mais habituado à noção de limite excluído (a "antiga", como em Vicente Gonçalves, Dias Agudo, Carlos Sarrico, Elon Lages Lima, mas não Mário Figueira, Santos Guerreiro nem Campos Ferreira, para só mencionar alguns dos mais próximos), optamos por preservar o simbolismo convencional ("lim") ao nos referirmos ao limite em ponto excluído. Assim, convencionamos que, daqui em diante,

$$\lim_{x\to c} f(x) = \operatorname*{lime}_{x\to c} f(x).$$

3. PROPRIEDADES DOS LIMITES

A unicidade de qualquer limite, quando existe, é prontamente estabelecida. Assim acontece, igualmente, com a maioria das outras propriedades dos limites de uma função num ponto.

3.1 Lema. *(a) Se qualquer um dos limites lim, limi existe, então é único.*

(b) Se o limite incluído existe, então o limite excluído existe e são iguais: $\lim_{x\to c} f(x) = \mathrm{limi}_{x\to c} f(x)$.

(c) Se $c \notin D_f$*, então o limite excluído existe sse o limite incluído existir.*

Nas partes (a) e (b), subentende-se que cada limite é considerado num ponto conforme a definição a que se reporta: ponto de acumulação em lim, ponto aderente em limi. A parte (b) do lema mostra que a noção de limite incluído (a dos novos programas) é um pouco mais restrita do que a do limite excluído. A parte (c) mostra que elas podem ser diferentes apenas no caso em que $c \in D_f$.

Dem. (b) Suponhamos que o limite incluído existe, digamos $b = \mathrm{limi}_{x\to c} f(x)$, e seja V uma vizinhança qualquer de b. Então existe uma vizinhança U de c tal que $f[U \cap D_f] \subseteq V$. Em particular, para todo $x \in U \cap D_f$ com $x \neq c$, $f(x) \in V$. Isto mostra que $\lim_{x\to c} f(x) = b$. □

A função f_1 ilustrada na fig. 1 constitui um exemplo em que as duas noções de limite num ponto diferem. Se $c = 0$, o limite (excluído) de f_1 em $c = 0$ existe e é igual a 0, enquanto o limite incluído não existe.

Apresentamos a seguir algumas condições necessárias e suficientes para a existência dos limites incluídos e excluídos, deixando a prova de algumas partes para o leitor.

3.2 Teorema de caracterização. *As seguintes condições, relativas ao limite excluído em ponto de acumulação do domínio, são equivalentes:*

(a) Existe o limite excluído $b = \lim_{x\to c} f(x)$.

(b) Para todo $\delta > 0$*, existe* $\varepsilon > 0$ *tal que, para todo o* $x \in D = D_f$*, se* $0 < |x - c| < \varepsilon$*, então* $|f(x) - b| < \delta$.

(c) Para qualquer sucessão $\langle x_n \rangle$ *de elementos de* $D = D_f$ *diferentes de* c *tal que* $\lim_{n\to\infty} x_n = c$*, tem-se* $\lim_{n\ to\infty} f(x_n) = b$.

Dem. (a) ⇒ (b). Suponhamos que existe o limite excluído $b = \lim_{x\to c} f(x)$, e seja dado $\delta > 0$ ao arbítrio. Como o intervalo aberto $V =]b - \delta,\ b + \delta[$ é uma vizinhança de b, por (a) existe uma vizinhança U de c tal que se $x \in U \cap D$ e $x \neq c$ então $f(x) \in V$, isto é, $|f(x) - b| < \delta$. Por definição de vizinhança de c, para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno isto também acontece, em particular, para todo o $x \in]c - \varepsilon,\ c + \varepsilon[\cap D$ e $x \neq c$, quer dizer, para todo o $x \in D$ tal que $0 < |x - c| < \varepsilon$.

(b) ⇒ (a). Seja V uma vizinhança ao arbítrio de b, e seja $\delta > 0$ tal que $]b - \delta,\ b + \delta[\subseteq V$. Por (b), existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo o x, se $x \in D_f$ e $0 < |x - c| < \varepsilon$, então $|f(x) - b| < \delta$. Ora, o conjunto dos pontos x tais que $|x - c| < \varepsilon$ é uma vizinhança U de c. Provou-se, assim, que existe uma vizinhança U de c tal que para todo o $x \in U \cap D$ com $x \neq c$, $f(x) \in V$. Portanto, $b = \lim_{x\to c} f(x)$.

(b) ⇒ (c). Seja $\langle x_n \rangle$ uma sucessão de elementos de D diferentes de c tal que $x_n \to c$, com vista a provar que $f(x_n) \to b$. Seja pois $\delta > 0$ ao arbítrio. Por (b), existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo o $x \in D$, $0 < |x - c| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$; por hipótese sobre $\langle x_n \rangle$, existe k tal que, para todo o $n \geq k$, $|x_n - c| < \varepsilon$, donde se conclui que para todo o $n \geq k$ se tem $|f(x_n) - b| < \delta$.

(c) ⇒ (b). A prova de que (c) implica (b) [ou (a)] é por redução ao absurdo. Admitamos (c) e suponhamos, com vista a um absurdo, que nenhum número real b é o limite de f quando $x \to c$ por valores diferentes de c. Fixado b ao arbítrio, temos então que existe $\delta_0 > 0$ tal que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $x \in D$ tal que $0 < |x - c| < \varepsilon$ mas $|f(x) - b| \geq \delta_0$.

Particularizando $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, ..., 1/(n+1), ...$, obtemos elementos x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ... de D, respetivamente, tais que para todo o n,

$$0 < |x_n - c| < \frac{1}{n+1)} \text{ mas } |f(x_n) - b| \geq \delta_0.$$ [5]

É evidente que $x_n \to c$ quando $n \to \infty$, mas $f(x_n) \nrightarrow b$, o que é absurdo. □

---

[3] Consideramos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Recorde-se que no *Formulaire Mathématique* de 1894, G. Peano toma o zero como primeiro número natural.

[4] O termo "excluído" é utilizado por Vicente Gonçalves, relativamente ao ponto c. Diz ele: "*a* [nosso "*c*"], ainda quando valor de *x*, é sempre excluído." Nota 2, p. 165 de Gonçalves, 1953.

[5] A "escolha" dos elementos x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ... de D tais que $0 < |x_n - c| < 1/(n + 1)$ para todo o n é feita utilizando uma forma enfraquecida do Axioma da Escolha, o chamado Axioma Numerável da Escolha (NC). Ver Oliveira 1982.

3.3 Teorema de caracterização. *As seguintes condições, relativas ao limite incluído, são equivalentes:*

(a) Existe o limite incluído $b = \mathrm{limi}_{x\to c} f(x)$.

(b) Para todo o $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo o $x \in D$, se $|x - c| < \varepsilon$, então $|f(x) - b| < \delta$.

(c) Para toda a sucessão $\langle x_n \rangle$ de elementos de $D = D_f$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, tem-se $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

As demonstrações dos dois teoremas anteriores são formalmente semelhantes. Todavia, a título ilustrativo das diferenças conceptuais, fazemos a demonstração parcial.

Dem. (a) $\Rightarrow$ (c). Seja $\langle x_n \rangle$ uma sucessão ao arbítrio de elementos de $D = D_f$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, com vista a provar que $f(x_n) \to b$. Dado $\delta > 0$ ao arbítrio, ponhamos $V =]b - \delta, b + \delta[$. Por (a), existe uma vizinhança U de c tal que $f[U] \subseteq V$, e, por definição de vizinhança, existe $\varepsilon > 0$ tal que $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\subseteq U$. Como, por hipótese, $x_n \to c$, tem-se $|x_n - c| < \varepsilon$ a partir de certa ordem k, donde $|f(x_n) - b| < \delta$ para todo o $n \geq k$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Admitamos (c) e suponhamos, com vista a um absurdo, que nenhum número real b é o limite de f quando $x \to c$. Fixado b ao arbítrio, temos então que existe $\delta_0 > 0$ tal que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $x \in D$ tal que $|x - c| < \varepsilon$ mas $|f(x) - b| \geq \delta_0$.

Particularizando $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, ..., 1/(n+1), ...$, obtemos uma sucessão x_0, x_1, ..., x_n, ... de elementos de D, respetivamente, tais que, para todo o n, $|x_n - c| < 1/(n+1)$ mas $|f(x_n) - b| \geq \delta_0$. [6] É evidente que $x_n \to c$ quando $n \to \infty$, mas $f(x_n) \nrightarrow b$, o que é absurdo. □

A caracterização dos limites em termos de sucessões desempenha um importante papel nos NPM, que discutimos na secção 4.

O resultado seguinte produz uma ligação instrutiva entre esses dois limites e a continuidade de f num ponto c do domínio de f. Esta por ser definida por: para toda a vizinhança V de $f(c)$ existe uma vizinhança U de c tal que $f[U \cap D] \subseteq V$; a alínea (b) seguinte enuncia outra maneira de definir a continuidade pontual à maneira "antiga" preferida por muitos.

3.4 Teorema. *Se c é um ponto de acumulação pertencente ao domínio D de f, as seguintes condições são equivalentes.*

(a) A função f é contínua em c.

(b) O limite excluído de f em c existe e é igual a $f(c)$.

(c) O limite incluído de f em c existe.

Dem. (a) $\Rightarrow$ (b): Seja V uma vizinhança qualquer de $f(c)$. Por (a), existe uma vizinhança U de c tal que, se $x \in U \cap D$, então $f(x) \in V$. Isto implica claramente que $\mathrm{lime}_{x\to c} f(x)$ existe e é igual a $f(c)$. Da mesma forma, $f(x)$ pertence a V para todo o $x \neq c$ em $U \cap D$, caso em que $\mathrm{lime}_{x\to c} f(x)$ existe e é igual a $f(c)$. Por outro lado, vê-se facilmente que as condições (b) e (c) implicam (a). □

Omitimos os enunciados e demonstrações de resultados relativos a combinações algébricas de funções (somas, produtos, etc.). O seguinte resultado, referente à composição de duas funções é mais profundo e é um dos poucos lugares onde trabalhar com o limite incluído é efetivamente mais simples do que com o limite excluído.

3.5 Teorema. *Seja f uma função com domínio $D_f \subseteq \mathbb{R}$ e valores em $\mathbb{R}$ e g uma função com domínio $D_g \subseteq \mathbb{R}$ e valores em $\mathbb{R}$. Seja $g \circ f$ a composta de f e g (g após f) e seja c um ponto de acumulação de $D_{g\circ f}$.*

(a) Se os limites excluídos $b = \lim_{x\to c} f(x)$, $a = \lim_{x\to b} g(x)$ existem e se g é contínua em b ou $f(x) \neq b$ para todo o x numa vizinhança de c, então o limite excluído de $g \circ f$ existe em c e

$$a = \lim_{x\to c}(g(f(x))).$$

(b) Se os limites incluídos $b = \mathrm{limi}_{x\to c} f(x)$, $a = \mathrm{limi}_{x\to b} g(x)$ ambos existem, então o limite incluído de $g \circ f$ em c existe e $a = \mathrm{limi}_{x\to c} g(f(x))$.

Dem. (a) Seja W uma vizinhança de a; como $a = \lim_{x\to b} g(x)$, há uma vizinhança V de b, de modo que se $y \in V \cap D_g$ e $y \neq b$, então $g(y) \in W$. Uma vez que $b = \lim_{x\to c} f(x)$, existe uma vizinhança U de c tal que se $x \in U \cap D_f$ e $x \neq c$, então $f(x) \in V$. Assim, se x pertencer ao conjunto possivelmente mais pequeno $U \cap D_{g\circ f}$ e $x \neq c$, então $f(x) \in V \cap D_g$. Se $f(x) \neq b$ em alguma vizinhança U_1 de c, segue-se que para $x \neq c$ em $(U_1 \cap U) \cap D_{g\circ f}$, então $(g \circ f)(x) \in W$, de modo que a é o limite excluído de $g \circ f$ em c. Se g for contínua em b, então $(g \circ f)(x) \in W$ para todo o x em $U \cap D_g$ e $x \neq c$.

Para provar a parte (b), observamos que as exceções feitas na prova de (a) não são mais necessárias. Portanto, se x pertence a $U \cap D_{g\circ f}$, então $f(x) \in V \cap D_g$ e, portanto, $g(f(x)) \in W$. □

A conclusão na parte (a) do teorema anterior pode falhar se deixarmos de lado a condição de que g seja contínua em b ou que $f(x) \neq b$ numa vizinhança de c. Para fundamentar esta observação, seja f_1 a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida em (2.1) e tomemos $g = f_1$ e $c = 0$. Então $g \circ f_1$ é dada por

$$(g \circ f_1)(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & c = 0 \end{cases}.$$

Além disso, temos $\lim_{x \to 0} f_1(x) = 0 = \lim_{y \to 0} g(y)$, mas é claro que $\lim_{x \to 0} g(f_1(x)) = 1$. Observe-se que os limites incluídos não existem para estas funções.

Tal como os limites clássicos, os limites incluídos estendem-se sem dificuldade a limites laterais, limites no infinito, limites infinitos, limite superior e inferior, continuidade, semicontinuidade, etc., e a funções vetoriais.

4. DISCUSSÃO FINAL

Com vista a melhor organizar os nossos comentários aos NPM relativos aos domínios *Sucessões e Funções Reais de Variável Real* FRVR11, começamos por citar algumas partes relevantes dos mesmos.

4.1 Citações dos NPM (11.º Ano)

Na parte *Conteúdos,* pode ler-se:

[1 (p. 15)][7] "No domínio *Sucessões*, após a apresentação de alguns aspetos gerais, é introduzido o princípio de indução matemática, que constitui um instrumento fundamental para o estudo de diversas propriedades das sucessões, servindo ainda de suporte teórico à definição de sucessões por recorrência. São estudadas as progressões aritméticas e geométricas bem como o cálculo da soma de sequências dos respetivos termos."

[2 (p. 15)] "A noção de limite é introduzida de forma cuidada. Uma abordagem puramente intuitiva dos limites leva rapidamente a insuficiências concetuais graves. É pois exigida, em situações muito simples, a justificação da convergência de certas sucessões recorrendo diretamente à definição. É também desenvolvida, de forma bastante completa, a álgebra dos limites, incluindo uma análise das situações ditas indeterminadas, devendo os alunos justificar igualmente alguns destes resultados."

[3 (p. 15)] "No domínio *Funções Reais de Variável Real*, do 11.º ano, utilizam-se os conceitos introduzidos no domínio *Sucessões*, para, pelo processo atribuído a Heine, ficar definida a noção de limite de uma função, num dado ponto ou em mais ou menos infinito. Neste contexto, são essencialmente duas as opções que classicamente se consideram para a definição de limite num ponto a real, consoante o domínio em que se tomam as sucessões a tender para a, para o efeito de testar a existência do referido limite. A opção privilegiada [p. 16] desde há bastante tempo no Ensino Secundário em Portugal tem sido a que consiste em considerar, de entre as sequências no domínio da função, apenas aquelas que nunca tomam o valor a. Ou seja, tem-se optado pelo que vulgarmente se designa por "limite por valores diferentes de a". Neste programa optou-se pela versão alternativa, que consiste em admitir, com o mesmo objetivo, sucessões que podem tomar o valor a; considera-se, com efeito, que esta opção apresenta diversas vantagens. Em primeiro lugar, por ser mais simples de formular (e permitir também uma formulação mais simples da noção de continuidade) e, em segundo lugar, porque a própria noção de "limite por valores diferentes" (como outras afins como a de "limite à esquerda" e "à direita") passa a poder ser encarada como caso particular da noção de limite, quando considerada a restrição da função inicial a um subconjunto do respetivo domínio."

[4 (p. 16)] "A definição de limite segundo Heine – que já é comum no Ensino Secundário – permite, de forma bastante imediata estender ao caso de funções reais a álgebra de limites estudada a propósito das sucessões, bem como os teoremas de convergência por comparação, como o Teorema das funções enquadradas, que é uma consequência direta, com esta abordagem, do Teorema das sucessões enquadradas e que são estudados no 12.º ano. Apresenta-se em seguida a noção de continuidade e, como uma aplicação da noção de limite de uma função, o estudo das assíntotas, em particular no caso do gráfico de uma função racional."

Na parte *Metas (Funções Reais de Variável Real* FRVR11), que concretiza em pormenor o que foi exposto nos Conteúdos acima, pode ler-se:

[5 (p. 36)] Limites segundo Heine de funções reais de variável real

1. Definir limite de uma função num ponto e estudar as respetivas propriedades fundamentais.

---

[6] A "escolha" dos elementos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$de D tais que $|x_n - c| < 1/(n+1)$ para todo o n é feita utilizando o Axioma Numerável da Escolha (NC).

[7] Para facilitar as referências, as numerações "[m (p. n)]" referem-se ao número do parágrafo citado e a página onde está localizado. A ortografia e as notações matemáticas nas citações são as originais e não as que eu próprio utilizo neste artigo.

1. Identificar, dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, a como "ponto aderente a A" quando existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$.[8]

2. Identificar, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in \mathbb{R}$", $b \in \mathbb{R}$ como "limite de $f(x)$ quando x tende para a" quando a for aderente ao domínio D_f de f e para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a, $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por "$\lim_{x\to a} f(x)$", referir, nesta situação, que "$f(x)$ tende para b quando x tende para a" e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos.

3. Identificar, dada uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, b como o "limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores inferiores a a" quando $b = \lim_{x\to a} f|_{]-\infty,a[}(x)$, representar b por $\lim_{x\to a^+} f(x)$, designá-lo também por "limite de $f(x)$ à esquerda de a", referir, nesta situação, que "$f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores inferiores a a" e estender esta definição ao caso de limites infinitos.(...)

[6, p. 37] 2. "Definir a noção de continuidade e as respetivas propriedades fundamentais

1. Justificar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, que se o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe então é igual a $f(a)$.

2. Designar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, a função f por "contínua em a" quando o limite $lim_{x\to a} f(x)$ existe."

4.2 Comentários

1 (p. 15). As sucessões desempenham um papel muito importante, por si mesmas e nas aplicações ao estudo dos limites de funções e continuidade nos NPM curriculares. Em primeiro lugar, trata-se de um primeiro confronto real com o infinito numerável, objetos infinitos e operações transcendentes. Neste domínio é introduzido o princípio de indução matemática, mas só depois é que se fala de progressões aritméticas e geométricas. Parece tudo um pouco estranho. O lugar apropriado para se falar da indução matemática seria no estudo dos números naturais e sua aritmética, chegando à divisibilidade e ao teorema fundamental da aritmética. Em todo o caso, parece-nos lógica e pedagogicamente mais apropriado tratar das progressões antes das sucessões.

2 (p. 15). A convergência de sucessões é assunto delicado, mas a este nível não há como evitar a definição rigorosa usual[9] (para todo o $\varepsilon > 0$, existe uma ordem a partir da qual...) ainda que não sejam de eliminar ou evitar explicações intuitivas e muitos exemplos e contra-exemplos ilustrativos.

3 (pp. 15-16). Chegamos ao domínio das funções reais de variável real, e aqui há sérias novidades. Na revisão anterior à presente também se adotou a definição de limite dita à Heine (ou segundo Heine), de uma função num ponto (ou no infinito qualificado), isto é, por meio de sucessões.[10] Mas, agora, a mudança para a perspetiva do limite em ponto incluído não foi precedida de nenhum estudo que a recomendasse nem de experiência piloto mais ou menos dilatada no tempo e devidamente avaliada no final. Agora, um voluntarista iluminado, amigo dos poderes tutelares, propôs a mudança que a tutela proclamou, e o resto do mundo que se amanhe. Por outro lado, é certo que a definição à Heine parece mais simples do que a weierstrassiana, mas paga-se um preço elevado: a forma lógica mais simples fez-se à custa de uma subida de tipo lógico dos objetos quantificados, nomeadamente, da quantificação de números (para todo o δ ... existe um ε ...) passou-se a uma quantificação de sucessões (para toda a sucessão...). Ora, não estou certo de que no 11.º ano seja bem assimilado o facto de uma sucessão de números reais ser um objeto, quanto mais, um objeto infinito quantificável. Mas esta subida no nível de abstração proposto não é a única.[11]

Na conceção e aplicação dos NPM, constatamos o autismo das decisões relativas a alterações nos programas, mas mais gravosas, porque são mais profundas e muito menos consensuais no universo das matemáticas ligadas ao ensino elementar. Porque, agora, se pôs de lado a ideia de "limite por valores diferentes de a" (acima designado por limite em ponto excluído) nas sucessões no domínio da função, e se adotou aquela outra que "consiste em admitir, com o mesmo objetivo, sucessões que podem tomar o valor a" (ver os teoremas de caracterização 3.2 e 3.3 acima).

Os autores do novo programa e das novas metas consideram que esta opção "apresenta diversas vantagens", por

(i) "ser mais simples de formular (e permitir também uma formulação mais simples da noção de continuidade)",

(ii) "porque a própria noção de 'limite por valores diferentes' (como outras afins como a de 'limite à esquerda' e 'à direita') passa a poder ser encarada como caso particular da noção de limite, quando considerada a restrição da função inicial a um subconjunto do respetivo domínio", e ainda porque

(iii) "A definição de limite segundo Heine (...) permite, de forma bastante imediata estender ao caso de funções reais a álgebra de limites estudada a propósito das sucessões, bem como os teoremas de convergência por comparação, como o Teorema das funções enquadradas (...). Apresenta-se em seguida a noção de continuidade (...)".

É claro que "ser mais simples de formular" não é argumento legítimo, se implicar, como é o caso, um "desvio" no sentido da abstração e da generalização (bourbakista?), absolutamente despropositadas no nível de ensino secundário, e isso não é aliviado pela adoção da definição à Heine, a qual funciona igualmente bem com as duas noções de limite de uma função num ponto. E quanto à continuidade, bem, ela já está contida na noção de limite incluído, no caso de a função estar definida no ponto. Bartle em *The Elements of Real Analysis*, p. 198, aponta uma vantagem do limite em ponto incluído: na demonstração do teorema sobre o limite da função composta, a qual, todavia, não faz parte dos programas. Mas uma vantagem decisiva dos limites em ponto excluído, reconhecida por todos os que a utilizam, que fica anulada com os limites incluídos é na definição de continuidade, que surge como especialização de uma noção um pouco mais geral.

Os autores dos NPM não enumeram nenhuma desvantagem, nem estudos que fundamentem as escolhas de uma maneira ou de outra. Isto, se não é, pelo menos parece ser uma maneira muito pouco científica ou pedagógica de proceder. Ainda que tivesse havido um prazo alargado e bem divulgado de apreciação prévia à entrada em vigor dos NPM, haveria de se avaliar o que estava mal antes e porquê, e sujeitar as partes novas a período experimental, com turmas piloto e professores especialmente treinados para o efeito. Quem vier a seguir, puder e quiser mudar tudo outra vez, a seu bel-prazer, não pode ser impedido de o fazer com o argumento de não haver precedentes. O mínimo que se pode dizer é que tudo isto está a léguas de distância de honrar a memória de José Sebastião e Silva.

Acrescentaria algumas opiniões que me parecem configurar desvantagens da noção de limite incluído. A primeira e mais importante, a meu ver, já foi indicada logo no início deste artigo, a propósito da função f_1 ilustrada na fig. 1: a quebra da ligação à ideia intuitiva de limite num ponto onde a função está definida. Fica sem explicação uma tão grande discrepância (entre o existir e o não existir limite) quando $x \to c$. A seguir, e sem querer cair no argumento de autoridade, não se compreende a súbita "quebra de tradição" no nosso ensino elementar, quando nada aconteceu a nível do ensino superior, aqui ou lá fora, que justifique ou sugira a conveniência de tal mudança. O mesmo Bartle em *The Elements of Real Analysis*, p. 197, assinala que o limite em ponto excluído é o mais popular, e em abono desse facto, por assim dizer, podemos mencionar os autores seguintes, desde os clássicos Courant (1924), Hardy (1921), Whittaker & Watson (1902), aos modernos Apostol (1974), Lang (1986), Rudin (1976), Strichartz (2000), Protter & Morrey (1986), Garling (2013), Marsden & Weinstein (1980), Spivak (2008) e muitos outros. Já Mawhin (1980) e Dieudonné (1969) adotam os limites incluídos, mas o tratamento que este último dá aos limites (cap. III 13) pela necessidade de tratar diferentemente casos especiais conforme o ponto pertence ou não ao domínio da função, não constitui o melhor exemplo da tão elusiva mas desejada elegância matemática.

Em conclusão, nada justifica as últimas alterações ao programa do domínio FRVR11 assinalados. Nem estudos, nem tradição, nem adequação pedagógica, e muito menos transparência de processos.

5. BIBLIOGRAFIA

Abbott, S. 2002. *Understanding Analysis*. Springer.

Apostol, T. 1967. *Calculus, Volume 1: One-variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra.* Second edition, Wiley.

Artigue, M. 2000. *Teaching and learning calculus: What can be learned from education research and curricular changes in France?", in E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld and J. Kaput (eds.), Research in Collegiate Mathematics Education IV*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, pp. 1–15.

Bartle, Robert G. 1964. *Elements of Real Analysis*, J. Wiley & Sons, Ltd.

[8] Nestas citações, os limites de funções num ponto a (o nosso "c") referidos são, obviamente, os limites em pontos incluídos "limi".

[9] Há outras definições rigorosas de convergência de sucessões e funções no âmbito do cálculo elementar que evitam totalmente as definições e os argumentos (δ, ε), como, por exemplo, em Hijab, *Introduction to Calculus ans Classical Analysis*, mas não são viáveis no ensino secundário.

[10.] Já encontramos esta abordagem nos programas em vigor nos anos 60, na perspetiva do limite em ponto excluído, cf. o *Compêndio de Álgebra* (1963) de J. Sebastião e Silva e J. da Silva Paulo, cap.V, p. 188.

[11] Uma maneira de simplificar e tornar mais compreensível a definição weierstrassiana (δ, ε) usual (e analogamente, pois, para a versão com ponto incluído) consiste em definir $lim_{x \to a} f(x) = b$ sse "Para todo o $n \in \mathbb{N}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo o x, se $0 < |x - a| < \varepsilon$, então $|f(x) - b| < 1/(n+1)$".

Bridges, D. S. 1998. *Foundations of Real and Abstract Analysis*. Springer.

Cornu, B. 1983. *Apprentissage de la notion de limite: Conceptions et obstacles*, Doctoral Dissertation, Université Scientifique et Médicale, Grenoble.

—— 1991. "Limits", in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 153–166.

Courant, R. 1937. *Differential and Integral Calculus*, Vol. I, trad. por McShane, E. J. Segunda edição, Interscience.

Courant, R. e John, F. 1965. *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. I, Interscience.

Courant, R., Robbins, H. e Stewart, Ian. 1996. *What is Mathematics?* Segunda edição, Oxford University Press.

Davis, R. B. e Vinner S. 1986. "The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages", *The Journal of Mathematical Behavior* 5, 281–303.

Grabiner, Judith V. 1983. "Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus". *The American Mathematical Monthly* 90, n. 3, pp. 185–194.

Jean Dieudonné, J. 1969. *Foundations of Modern Analysis*, vol. 1. 2.ª edição revista, Academic Press.

Douglas, R. G. (Editor). 1986. *Toward a Lean and Lively Calculus*. MAA.

EDM2 *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*. 1993. 2.ª edição, MIT Press, vol. I, p. 326 segs.

Figueira, Mário S. R. 2011. *Fundamentos de Análise Infinitesimal.* 5.ª edição, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Ferrini-Mundi, J. e Graham, K. 1994. *Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives and integrals*, in J. Kaput and E. Dubinsky (eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning: Preliminary Analyses and Results*, MAA Notes 33, Washington, pp. 31-45.

Garling, D. J. H. 2013. *A Course in Mathematical Analysis*, vol. I, *Foundations and Elementary Real Analysis*. Cambridge University Press.

Gray, J. 2015. *The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century*. Springer.

Gonçalves, J. Vicente. 1953. *Curso de Álgebra Superior, I Parte: Elementos Gerais de Análise Real*, 3.ª edição, Lisboa.

Hairer, E., e Wanner, G. 1996. *Analysis by its History*, Springer.

Hardy, G. H. 1952. *A Course of Pure Mathematics*. 10.ª edição. Cambridge University Press.

Hijab, Omar. 1997. *Introduction to Calculus and Classical Analysis*. Springer.

Landau, E. 1980. *Differential and Integral Calculus*, MAS Chelsea, 3.ª edição, 2.ª impr.

Lang, S. 1986. *A First Course in Calculus.* 5.ª edição, Springer.

Lima, Elon Lajes. 1976. *Curso de Análise*, Vol. I, IMPA, Projecto Editores.

[NPMC]. 2013. Novos Programas e Metas Curriculares de Matemática A para o Ensino Secundário (cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas), *Diário da República* 2.ª série, n.º 143, de 26 de julho de 2013. Disponível em *http://www.matematica.pt/docs/diversos/programa-metas-curriculares-matematica-secundario.pdf*

Marsden, J., e Weinstein, A. 1980. *Calculus I, II, III.* Springer.

Mawhin, J. 1992. *Analyse – Fondements, techniques, évolution.* De Boeck Université.

Oliveira, A. J. Franco. 1982. *Teoria de Conjuntos, Intuitiva e Axiomática (ZFC)*. Escolar Editora.

Pedrick, G. 1994. *A First Course in Analysis*. Springer.

Protter, M. H., e Morrey, C. B. Jr. 1986. *Intermediate Calculus.* Springer.

Rudin, W. 1976. *Principles of Mathematical Analysis.* 3.ª edição, McGraw-Hill.

Spivak, M. 2008. *Calculus.* 4.ª edição (disponível *online*).

Strichartz, Robert S. 2000. *The Way of Analysis.* Segunda edição, Jones and Bartlett Books in Mathematics.

Tall, D. 1992. *'Students' Difficulties in Calculus Plenary presentation in Working Group 3*, ICME, Québec, August 1992. Published in *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*, ICME-7 1992, Québec, Canada, (1993), pp. 13–28.

—— 1996. *'Function and calculus'*, in A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (editores), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 289–325.

Sierpinski, W. 1916. *Sur le rôle de l'axiome de M. Zermelo dans l'Analyse Moderne, Compt. Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, Paris 193, pp. 688-691.

Sebastião e Silva, J. 1976. *Compêndio de Matemática*, 2.º volume, GEP, Lisboa.

Sebastião e Silva, J. e Silva Paulo, J. 1963. *Compêndio de Álgebra*. Livraria Popular de Francisco Franco, Lisboa.

Sinkevich, G. I. 2015. *On the history of epsilontics. St. Petersburg University of Architecture and Civil Engineering.* UDK 51(091).

Whittaker, E. T. e Watson, G. N. 1920. *A course of modern analysis; an introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions.* Cambridge University Press.

Cotovia, 10 de Agosto de 2017
https://sites.google.com/site/tutasplace/

SOBRE O AUTOR

Augusto J. Franco de Oliveira. Licenciado em Ciências Matemáticas pela Universidade de Lisboa. Mestre em Lógica Matemática pela Universidade de Leeds, Inglaterra, e Doutor em Matemática (especialidade de Álgebra, Lógica e Fundamentos) pela Universidade de Lisboa. Lecionou no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa (1968-1997) e no Departamento de Matemática da Universidade de Évora (1998-2007). Recebeu o título de Professor Emérito em Novembro de 2008. Lecionou também no Mestrado em História e Filosofia das Ciências na Secção Autónoma de História e Filosofia das Ciências da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (2008-2012). Conhecido conferencista, com vários livros e traduções publicadas nas áreas de Lógica e Fundamentos, Geometria, Análise Não-Standard, História e Filosofia da Matemática.