A CONJETURA DAS ZONAS DE TÓTH

Neste artigo falamos da demonstração de algumas conjeturas de geometria discreta, começando nos anos 30 e terminando no ano passado.

Pedro J. Freitas
Universidade de Lisboa
pjfreitas@fc.ul.pt

Manuel Silva
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

Nesta coluna tentamos falar de resultados matemáticos demonstrados recentemente. Nem sempre isso tem acontecido – por exemplo, aquando da morte de Grothendieck, falámos de resultados com mais de 40 anos. Desta vez, porém, o resultado que dá o tema a este texto não pode ser mais recente: foi publicado na revista *Geometry and Functional Analysis* em dezembro passado, tendo ficado disponível *online* a 24 de novembro, no artigo [1]. Trata-se da demonstração de uma conjetura de László Fejes Tóth, formulada nos anos 70 do século passado, relativa a coberturas de esferas em $\mathbb{R}^n$.

Antes de descrevermos a conjetura, porém, vamos falar de um problema do mesmo teor, o das coberturas de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ com *bandas*, isto é, com zonas de $\mathbb{R}^n$ compreendidas entre dois hiperplanos paralelos. Dizemos que a largura de uma banda é a distância entre estes dois hiperplanos e definimos *largura* de um conjunto qualquer de $\mathbb{R}^n$ como o menor w tal que uma banda de largura w cobre o conjunto.

Num artigo de 1932, Tarski trata o problema de cobrir um conjunto convexo do plano por bandas, provando que, para qualquer cobertura, a largura do conjunto não excede a soma das larguras das bandas que o cobrem. Por outras palavras: mesmo usando várias bandas para cobrir um conjunto convexo, não se consegue melhor do que cobri-lo com uma banda de largura mínima. A figura 1 ilustra esta situação.

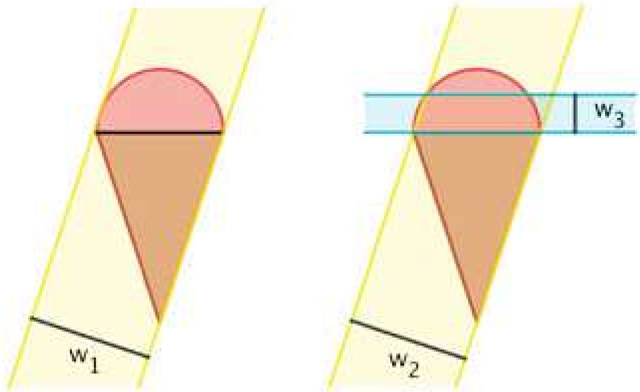

Figura 1. Duas coberturas de um conjunto do plano por bandas: $w_1 < w_2 + w_3$.

A generalização da conjetura para conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ aparece em dois artigos, de 1950 e 1951, de Thøger Bang, nos quais o autor prova esta versão generalizada. A conjetura teve entretanto mais reformulações, despertando ainda interesse hoje em dia, veja-se um levantamento em [2].

A conjetura de Tóth refere-se a coberturas de esferas de dimensão d em $\mathbb{R}^{d+1}$. Nesta situação, apenas se consideram bandas simétricas em relação ao centro da esfera, que vêm a ser simétricas também em relação a um hiperplano que contém o centro da esfera, chamado hiperplano central (da banda). Veja-se uma ilustração para $d = 2$ na figura 2: a banda é delimitada pelos planos a amarelo, o hiperplano central está a cinzento.

Chamamos *zona* à interseção de uma destas bandas

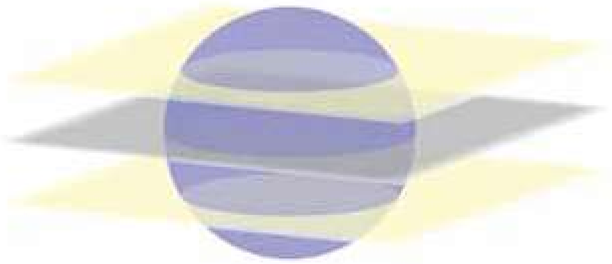

Figura 2. Interseção de uma esfera com uma banda em $\mathbb{R}^3$, com hiperplano central.

com a esfera. Medimos a sua largura angularmente: dizemos que a *largura* (angular) de uma zona é ω se esta puder ser descrita como o conjunto dos pontos da esfera cuja distância angular ao hiperplano central (medida sobre a esfera) é menor ou igual a $\omega/2$.

A figura 3 apresenta uma cobertura de uma circunferência por três zonas. A soma das suas larguras é π. Estão também representados vetores perpendiculares aos hiperplanos centrais de cada uma das bandas que definem as zonas – estes vetores definem a posição dos hiperplanos.

Em 1974, Tóth conjeturou que, se uma esfera de $\mathbb{R}^{d+1}$ for coberta por n zonas de largura (angular) igual, então esta largura tem de ser, pelo menos, π/n. Mais tarde, generalizou esta conjetura para zonas de largura angular não necessariamente igual: se n zonas cobrem a esfera,

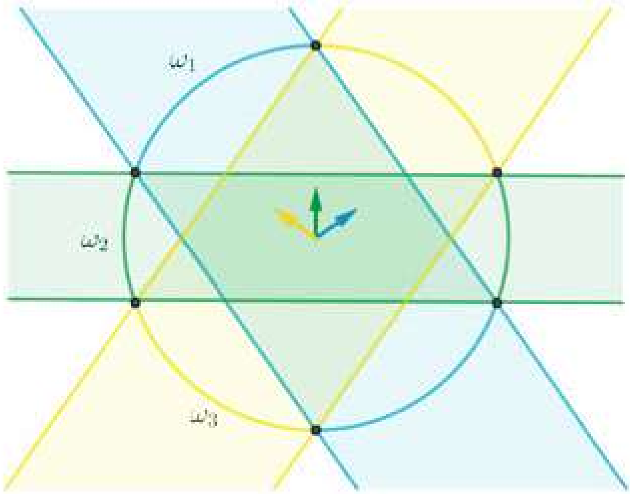

Figura 3. Circunferência decomposta em três zonas, com $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \pi$.

então a soma das suas larguras tem de ser, pelo menos, π. O tipo de afirmação é semelhante ao da conjetura de Tarski: mesmo cobrindo a esfera com várias zonas, as suas larguras somadas têm de ser, pelo menos, a de uma zona só, correspondente à esfera toda.

No artigo [1], Zilin Jiang e Alexandr Polyanskii demonstram esta conjetura, com um uso engenhoso de ferramentas de matemática elementar e de ideias presentes em artigos anteriores. Na verdade, o que demonstram é mais forte. O resultado é o seguinte.

Teorema. *Sejam $P_1, \ldots, P_n$ n zonas que cobrem a d-esfera. Além disso, para cada $1 \leq i \leq n$, sejam $2\alpha_i$ a largura de P_i e r_i a reta que passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao hiperplano central de P_i.*

Temos então que a soma das larguras de $P_1, \ldots P_n$ é, pelo menos, π, havendo igualdade se e só se, após reordenamento das zonas, $r_1, \ldots, r_n$ são complanares e estão dispostas em sentido anti-horário, de tal modo que o ângulo entre r_i e r_{i+1} é igual a $\alpha_i + \alpha_{i+1}$, para todo o $1 \leq i \leq n$ (com a convenção $\alpha_{n+1} = \alpha_1$).

O resultado afirma, portanto, que num arranjo ótimo de zonas na esfera, as retas perpendiculares aos hiperplanos centrais se dispõem num plano. Ou seja, se intersetarmos toda a figura com esse plano, a disposição é semelhante à da figura 3. Assim, neste caso, o que se passa em dimensão 2 (com esfera de dimensão 1) é exemplar, as retas são dirigidas pelos vetores representados.

O artigo usa ainda estes resultados e métodos para demonstrar uma versão um pouco mais geral da conjetura de Tóth, terminando com uma lista de conjeturas relacionadas. Em 1930, quando Tarski apresentou a primeira conjetura que aqui mencionámos, o tema da geometria discreta estava a nascer. Quase 90 anos depois, vemos que o tema continua vivo e a despertar interesse, gerando novos resultados e novos problemas.

REFERÊNCIAS

[1] Jiang, Z. & Polyanskii, A. "Proof of László Fejes Tóth's zone conjecture" *Geom. Funct. Anal.* (2017) 27: 1367. *https://doi.org/10.1007/s00039-017-0427-6*. arXiv:1703.10550 [math.MG]

[2] K. Bezdek, "Tarski's plank problem revisited" *Geometry—intuitive, discrete, and convex*, v. 24 of Bolyai Soc. Math. Stud., 45-64. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2013. arXiv:0903.4637 [math.MG]