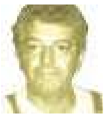

Jorge Nuno Silva
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

OS *NÍMEROS* SURPREENDEM DE NOVO!

Revisitamos um problema proposto no nosso primeiro Recreio (*Gazeta* 145), já lá vão uns três lustros. O problema que apresentámos, envolvendo três pessoas, generaliza-se com um resultado surpreendente. Veremos que, no jogo proposto, quantos mais participam, maior é a probabilidade de todos ganharem! Uma versão do jogo é a seguinte.

TRÊS NUMA FESTA

Três amigas, Alice, Berta e Carla, recebem convites para uma festa. Os convites trazem também a descrição de um jogo social que será praticado quando chegarem ao local da diversão. As regras são as seguintes: Ao entrar na casa, o mordomo coloca na cabeça de cada uma delas um chapéu. Este só pode ser vermelho ou azul, e a escolha é feita por moeda ao ar pelo criado. Cada uma das três não pode ver o chapéu que tem na própria cabeça, mas vê com facilidade os que couberam às outras duas amigas. Num momento preciso, simultaneamente, as três convidadas tentam adivinhar a cor do chapéu que lhes coube, ou dizem "passo!". Se, pelo menos uma acertar e nenhuma errar, ganham, em conjunto, um bilião de euros. Caso contrário, não ganham nada.

Ao ver o convite, disse a Alice: "Bom, vocês passam e eu digo uma cor à sorte. Assim temos 50% de chances de ganhar uma fortuna. Vamos embora para essa festa!" Mas a Carla interrompeu: "Parece-me que há maneira mais inteligente de jogar..."

O que passou pela cabeça da Carla?

Na edição 146, mostrámos que a estratégia de adivinhar a cor contrária, quando se vê duas cores iguais, e passar em todos os outros casos, garante 75% de probabilidade de ganhar este jogo.

Imaginemos agora que temos sete jogadores a enfrentar um jogo com regras similares. A vitória corresponde a alguém acertar e ninguém errar. Qual a melhor estratégia neste caso?

Mais uma vez, a *soma-nim* vem em nosso auxílio. (Relembro que, em base 2, a tabuada é a seguinte: $0 + 0 = 1 + 1 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$.)

Numeremos os jogadores de 1 a 7, de forma a que todos saibam que número tocou a cada um. Para simplificar, sejam os jogadores representados por

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
1	2	3	4	5	6	7

Façamos uma distribuição de chapéus:

•	•	•	•	•	•	•
A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
1	2	3	4	5	6	7

A estratégia ótima é a seguinte: cada jogador faz a soma-nim dos números dos jogadores que vê terem chapéu azul. Se esse número coincidir com o seu próprio número, deve gritar "vermelho". Em qualquer outro caso, deve passar.

Na tabela seguinte, constam os cálculos e o resultado da aplicação deste esquema.

•	•	•	•	•	•	•
A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
1	2	3	4	5	6	7
6	4	5	6	6	6	1
Passo	Passo	Passo	Passo	Passo	Passo	Passo

Assim, o acerto do jogador F e a abstenção dos restantes garantiu a vitória.

Em geral, se a soma-nim dos números dos jogadores com chapéus azuis for nula, todos erram o palpite. Caso contrário, há só um que acerta e todos os outros passam, uma vitória. Para sete jogadores, há 128 maneiras de distribuir os chapéus, das quais 112 originam soma-nim dos que têm chapéu azul nula. A probabilidade de vitória é, portanto, $112/128 = 7/8$! Nada mau!

E se tivéssemos 31 jogadores?

Sobre a questão do número anterior: Como muito bem nos comunicou o nosso assíduo leitor Luís Madureira, a quem agradecemos a colaboração, no primeiro problema cada um dos $n-1$ filhos recebe $n-1$ euros, enquanto na segunda versão tocam n euros a cada um dos $n-1$ filhos.