CONJUNTOS CONVEXOS E INTERSECÇÕES DE CÍRCULOS

Intersectando círculos pode obter-se um triângulo?

João Filipe Queiró
Universidade de Coimbra
jfqueiro@mat.uc.pt

Um conjunto S no plano diz-se **convexo** se, quaisquer que sejam os pontos x e y de S, o segmento de recta com extremos em x e y estiver totalmente contido em S. Exemplos simples de conjuntos convexos são os triângulos, os quadrados e os círculos.

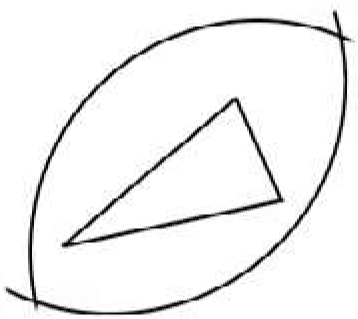
É óbvio que a intersecção de qualquer família de conjuntos convexos é ainda um conjunto convexo. Por exemplo, a intersecção de qualquer família de círculos é um conjunto convexo.

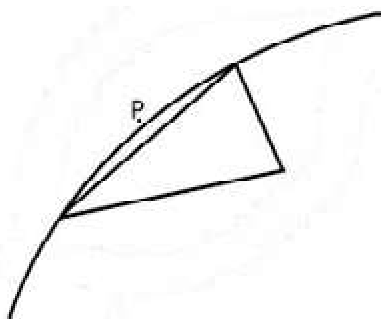
Uma pergunta interessante nasce de uma espécie de recíproco da afirmação anterior: que conjuntos convexos podem obter-se intersectando círculos? Esta pergunta é o objecto da presente nota.

A resposta é curiosa: essencialmente todos os conjuntos convexos se podem obter como intersecções de círculos, desde que naturalmente nos restrinjamos a conjuntos convexos limitados (já que qualquer círculo é um conjunto limitado).

A afirmação anterior é, à primeira vista, surpreendente: como é que, por exemplo, um triângulo pode ser uma intersecção de círculos? Mas basta pensar uns segundos para perceber o que está em causa.

Tomemos então um triângulo qualquer, fechado no sentido topológico, isto é, contendo a sua fronteira (suposição que faremos para todos os conjuntos neste texto). A afirmação precisa que fazemos é que o triângulo é exactamente igual à intersecção dos círculos que o contêm. É evidente que o triângulo está contido em tal intersecção. Provemos agora que essa intersecção é igual ao triângulo. Se não fosse, existiria pelo menos um ponto p fora do triângulo mas pertencendo a todos os círculos que contêm o triângulo. Mas é simples perceber que, escolhendo o centro do lado oposto a p e suficientemente longe, se consegue encontrar um círculo contendo o triângulo mas deixando p de fora.





O raciocínio que acabámos de ver pode ser generalizado para um espaço vectorial real E de dimensão finita com produto interno. Uma boa referência para o estudo de conjuntos convexos nesse contexto é o livro [1].

Teorema. *Seja S um conjunto convexo fechado limitado em E. Então S é igual à intersecção de todas as bolas fechadas que o contêm.*

Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno e por $\| \cdot \|$ a correspondente norma.

Seja p um ponto não pertencente a S. Vamos construir uma bola fechada contendo S e não contendo p. Seja H um hiperplano que separa p de S (no sentido estrito, isto é, H está a uma distância positiva dos objectos separados) e seja q um ponto de H. Denotemos por R a semi-recta que é ortogonal a H em q e que está do mesmo lado de H que S. Consideremos a família $\mathcal{B}$ de bolas fechadas centradas em pontos de R e que são tangentes a H em q. É claro que p não pertence a nenhuma destas bolas.

Dado um ponto arbitrário $s \in S$, alguns cálculos mostram que o raio da bola em $\mathcal{B}$ cuja fronteira passa por s é dado por

$$\rho(s) = \frac{\|s-q\|^2 \|r-q\|}{2\langle s-q, r-q \rangle}$$

onde r é qualquer ponto de R.

Esta expressão define uma função contínua em S, uma vez que a distância entre H e S é positiva (e, portanto, o produto interno no denominador nunca é zero). Ponhamos $\rho = \max\, \rho(s)$ (que existe, por S ser fechado e limitado). É óbvio que a bola em $\mathcal{B}$ com raio ρ contém S. $\square$

Uma consequência potencialmente útil tem que ver com a noção de invólucro convexo.

O invólucro convexo de um conjunto define-se como a intersecção de todos os conjuntos convexos que contêm o conjunto. É, no sentido da inclusão, o mais pequeno conjunto convexo que contém o conjunto dado. Quando se estuda conjuntos convexos, esta definição é habitualmente seguida por várias caracterizações do invólucro convexo, que em diversas situações tornam mais simples verificar se um dado ponto lhe pertence ou não.

É consequência imediata do teorema que, dado um conjunto S fechado e limitado qualquer em E, um ponto p pertence ao invólucro convexo de S se e só se, para todo o v no espaço, se tiver

$$\|p-v\| \leq \max_{s\in S} \|s-v\|\,.$$

Voltando ao teorema, ele não é válido em espaços normados arbitrários, como se pode ver tomando as normas $\|(x_1,x_2)\| = |x_1| + |x_2|$ ou $\|(x_1,x_2)\| = \max\{|x_1|,|x_2|\}$ em $\mathbb{R}^2$. O problema está na falta de diferenciabilidade da fronteira das bolas construídas com essas normas.

No artigo [2] são descritas com precisão, no contexto de $\mathbb{R}^n$ com a topologia usual, as famílias de subconjuntos com a propriedade de que qualquer conjunto convexo fechado limitado é igual à intersecção de todos os conjuntos da família que o contêm. Omitindo os pormenores, a ideia básica é que nas fronteiras dos conjuntos de uma tal família todas as "direcções de diferenciabilidade" devem estar representadas. A família das bolas provindas de um produto interno é o exemplo mais simples.

Agradeço a Cristina Caldeira a leitura cuidadosa do texto.

REFERÊNCIAS

[1] S. R. Lay, *Convex sets and their applications*, New York, Wiley, 1982.

[2] J. F. Queiró e E. Marques de Sá, "On separation properties of finite dimensional compact convex sets", *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124, p. 259-264, 1996.