UMA ABORDAGEM MATEMÁTICA DO SUDOKU

PEDRO M. LIMA
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO, UNIVERSIDADE DE LISBOA
pedro.t.lima@ist.utl.pt

O objetivo deste texto é expor alguns conceitos e regras básicas que, aplicadas de forma sistemática, permitam resolver qualquer problema de SUDOKU.

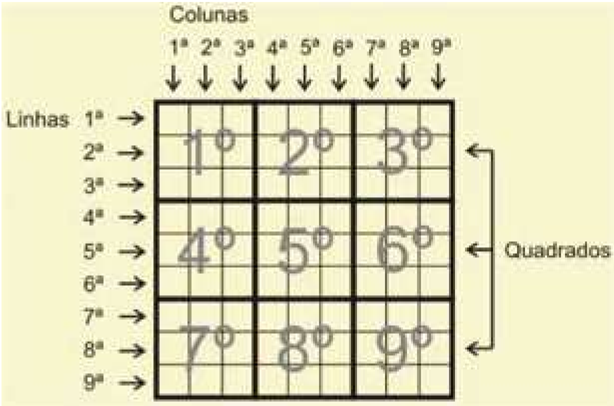

Figura 1. Tabela de Sudoku.

1 INTRODUÇÃO

Como é do conhecimento geral, o jogo do SUDOKU é um quebra-cabeças, de origem japonesa, que consiste numa tabela de 9×9 células, a qual está dividida em 9 quadrados pequenos de dimensão 3×3 (ver fig. 1).

Neste texto designarei por conjunto fundamental cada um dos seguintes conjuntos de 9 células: uma linha, uma coluna ou um quadrado pequeno da tabela.

Evidentemente, numa tabela de SUDOKU existem 27 conjuntos fundamentais: 9 linhas, 9 colunas e 9 quadrados.

Definido o conceito de conjunto fundamental, **a regra principal do SUDOKU** pode ser formulada da seguinte maneira:

Cada dígito $i \in 1, ..., 9$ aparece uma e só uma vez em cada conjunto fundamental da tabela.

O objetivo do jogo é preencher totalmente a tabela, observando a regra principal.

Para garantir que um problema tem solução única, na tabela inicial está preenchido um certo número de células (geralmente entre 20 e 30, conforme o grau de dificuldade do problema).

Se o problema estiver corretamente formulado, ele deverá ter solução única; mas também existem problemas que não têm solução ou que admitem múltiplas soluções .

Em [1] e [2] foi provado que um problema de SUDOKU com solução única tem, pelo menos, 17 células preenchidas na tabela inicial. No entanto, o número da células preenchidas, por si só não garante a unicidade de solução. Na realidade, pode construir-se até uma tabela com 77 células preenchidas que admite mais do que uma solução.

Hoje em dia, o SUDOKU está profusamente difundido por todo o mundo: existem milhares de publicações sobre o jogo em muitas línguas diferentes e até se realizam competições internacionais da modalidade. De referir um interessante artigo sobre SUDOKU na Wikipedia. Além dos artigos já citados, gostaria ainda de mencionar [3] e [4], onde os leitores poderão encontrar mais informações sobre este jogo apaixonante.

2 CONJUNTO DE POSSIBILIDADES

A técnica de resolução que se propõe baseia-se no conceito de **conjunto de possibilidades**.

Definição. Chama-se conjunto de possibilidades de uma célula ao conjunto de dígitos que podem preenchê-la, de acordo com as regras do jogo. Representaremos o conjunto de possibilidades da célula c por $p(c)$.

Na tabela inicial, se uma célula tiver as coordenadas (i, j) e pertencer a um certo quadrado Q, então o conjunto das possibilidades dessa célula é constituído pelos dígitos de 1 a 9 que não ocorrerem em nenhuma entrada da linha i, da coluna j, ou do quadrado Q.

Ao longo do processo de resolução do problema, os conjuntos de possibilidades das células são reduzidos, de acordo com novas regras que vamos estudar.

Evidentemente, se o conjunto de possibilidades de uma célula for um conjunto **singular**, então a célula encontra-se **resolvida**, isto é, existe uma única maneira correta de a preencher. Assim, um problema estará resolvido quando todas as células da tabela estiverem resolvidas.

Exemplo 1. Suponhamos que na linha 2 da tabela já estão preenchidas células com os dígitos 1, 2, 3; na coluna 3 já estão preenchidas células com os dígitos 4, 5, 6; e no primeiro quadrado dessa tabela estão preenchidas células com os dígitos 7, 8 (ver fig. 2). Nesse caso, o conjunto de possibilidades da célula (2, 3) é constituído apenas pelo dígito 9, ficando a célula resolvida com esse dígito.

Como já foi dito, no início de cada jogo existe um certo número de células resolvidas, o que naturalmente implica certas restrições aos conjuntos de possibilidades das restantes células. A primeira coisa a fazer, portanto, é determinar o conjunto de possibilidades de cada célula não resolvida. Ao fazê-lo, possivelmente, algumas dessas células ficarão imediatamente resolvidas (como no exemplo 1).

O método que se propõe é por etapas, tentando reduzir sucessivamente o cardinal do conjunto de possibilidades de todas as células, até que todos os conjuntos de possibilidades sejam singulares. Para isso, vamos definir um conjunto de conceitos e regras, resultantes da regra principal do SUDOKU.

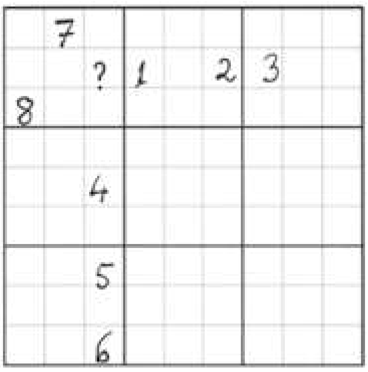

Figura 2. Ilustração do exemplo 1: pretende-se determinar o conjunto de possibilidades da célula (2, 3).

3 REGRA DA ÚNICA OCORRÊNCIA

Já sabemos que uma célula fica resolvida quando o conjunto de possibilidades é singular. Além disso, existe outra situação em que uma célula fica imediatamente resolvida: se houver um dígito que ocorre apenas no conjunto de possibilidades de uma das células dum certo conjunto fundamental. Nesse caso, obviamente, esse dígito constitui a solução dessa célula (doutro modo, o dígito referido não ocorreria no conjunto fundamental em causa, violando a regra principal do SUDOKU).

Exemplo 2. Suponhamos que a célula (i, j), do quadrado Q, tem o conjunto de possibilidades $p(i,j) = 1,2,3$; e que o dígito 3 não pertence ao conjunto de possibilidades de nenhuma outra célula da linha i (ou da coluna j, ou do quadrado Q). Nesse caso, a célula (i, j) será preenchida pelo dígito 3 (descartando-se as possibilidades 1 e 2).

Designaremos esta regra por regra da única ocorrência.

4 SUB CONJUNTOS INDEPENDENTES

A existência de um conjunto de possibilidades singular e a regra da única ocorrência permitem-nos imediatamente resolver uma célula. No entanto, além destas, existem outras regras que, não permitindo imediatamente resolver uma célula, permitem reduzir o cardinal dos conjuntos de possibilidades de algumas células.

Para formularmos essas regras vamos começar por definir subconjuntos independentes de células e de dígitos. Suponhamos que num certo conjunto fundamental existem duas células (designemo-las por A e B), para as quais o conjunto de possibilidades coincide e é constituído apenas por dois dígitos: $p(A) = p(B) = \{d_1, d_2\}$. Nesse caso, dizemos que as células A, B formam um **subconjunto independente de duas células.**

A existência de um subconjunto independente de duas células significa que os dígitos d_1, d_2 só podem ocorrer nessas duas células (e não em nenhuma das outras células do mesmo grupo fundamental). Esta regra, que designaremos por regra das duas células, permite-nos descartar todas as ocorrências dos dígitos d_1, d_2 nos conjuntos de possibilidades das outras células do mesmo conjunto fundamental, reduzindo assim esses conjuntos de possibilidades.

Exemplo 3. Suponhamos que na mesma linha (ou coluna, ou quadrado) existem quatro células com os seguintes conjuntos de possibilidades: $p(A) = \{5,6\}$, $p(B) = \{1,2,3,4,5,6\}$, $p(C) = \{5,6\}$, $p(D) = \{5,6,7,8\}$. Neste caso, os conjuntos de possibilidades das células A e C têm cardinal 2 e coincidem, pelo que estas duas células formam um subconjunto independente. Por conseguinte, os dígitos 5, 6 só podem ocorrer nessas duas células. Assim, a aplicação da regra das duas células faz com que os conjuntos de possibilidades das células B e D passem a ser $p(B) = \{1,2,3,4\}$, $p(D) = \{7,8\}$.

De forma análoga se define um **subconjunto independente de dois dígitos**. Suponhamos que dois dígitos d_1, d_2 ocorrem apenas nos conjuntos de possibilidades de duas células (c_1, c_2) do mesmo conjunto fundamental (não ocorrendo no conjunto de possibilidades de nenhuma outra célula desse conjunto). Então diz-se que os dígitos d_1, d_2 formam um **subconjunto independente de dois dígitos**, associado às células c_1, c_2. Note-se que os conjuntos de possibilidades das células c_1, c_2 poderão à partida ter outros dígitos além de d_1 e d_2.

A importância da existência de subconjuntos independentes de dois dígitos consiste em nos permitir reduzir o conjunto das possibilidades das células correspondentes. Isto é, nas células em que ocorrem os dígitos d_1, d_2, o conjunto de possibilidades deixará de ter outros dígitos que não sejam esses. A esta regra chamaremos a **regra dos dois dígitos**. Isto explica-se porque, se os dígitos d_1, d_2 não aparecem em mais nenhuma célula do mesmo conjunto fundamental, então eles terão de preencher estas duas células e nelas não poderá ocorrer qualquer outro dígito.

Exemplo 4. Suponhamos que na mesma linha existem duas células A e B, tais que os seus conjuntos de possibilidades são $p(A) = \{1, 2, 3\}$ e $p(B) = \{2, 3, 4\}$; suponhamos ainda que os dígitos 2, 3 não figuram nos conjuntos de possibilidades de nenhuma outra célula da mesma linha. Nesse caso, os dígitos {2, 3} formam um subconjunto independente de dois dígitos, associado às células A, B. Da aplicação da regra dos dois dígitos resulta que os conjuntos de possibilidades das células A e B passam a ser iguais: $p(A) = p(B) = \{2, 3\}$ (sendo descartadas as outras possibilidades das células A e B).

Da mesma forma que se definem os subconjuntos independentes de duas células e de dois dígitos, podem ser definidos conjuntos independentes de k células e k dígitos, com $k = 2, 3, ..., 8$. A definição é a seguinte:

As células $c_1, c_2, \ldots, c_k$ (do mesmo conjunto fundamental) formam um subconjunto independente se e só se o cardinal da reunião dos conjuntos de possibilidades dessas células for k, ou seja,

$$p(c_1) \cup p(c_2) \cup \cdots \cup p(c_k) = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\},$$

onde $d_1, d_2, \ldots, d_k$ são k dígitos distintos.

Uma vez definido um conjunto independente de k células, a regra das k células pode ser formulada do seguinte modo:

Se as células $c_1, c_2, \ldots, c_k$ formarem um subconjunto independente, tal que a reunião dos seus conjuntos de possibilidades seja $\{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$, então os dígitos $d_1, d_2, \ldots, d_k$ não podem ocorrer nos conjuntos de possibilidades das outras células do mesmo conjunto fundamental.

É fácil verificar que, no caso de $k = 2$, esta regra se reduz à regra das duas células, anteriormente formulada.

Exemplo 5. Suponhamos que A, B, C são células do mesmo conjunto fundamental, tais que $p(A) = \{2, 3\}$, $p(B) = \{1, 3\}$, $p(C) = \{1, 2\}$. Neste caso, temos $p(A) \cup p(B) \cup p(C) = \{1, 2, 3\}$, ou seja, o cardinal da reunião é 3, igual ao número de células. Logo, as células A, B, C formam um subconjunto independente de três células. Suponhamos que no mesmo conjunto fundamental existem as células D, E, F com os conjuntos de possibilidades $p(D) = \{2, 3, 4\}$, $p(E) = \{1, 3, 5, 6\}$, $p(F) = \{1, 2, 5, 6\}$. Pela aplicação da regra das três células, estes conjuntos de possibilidades ficariam reduzidos a $p(D) = 4$, $p(E)=\{5,6\}$, $p(F) = 5, 6$. Em particular, a célula D ficaria resolvida. $p(E)=\{5,6\}$,

Finalmente, defina-se um subconjunto independente de k dígitos.

Diremos que os dígitos $d_1, d_2, \ldots, d_k$ formam um subconjunto independente de k dígitos, associados às células $c_1, c_2, \ldots, c_k$ de um certo conjunto fundamental, se cada um esses dígitos figurar, pelo menos, no conjunto de possibilidades de uma dessas células, e se não figurar em nenhum conjunto de possibilidades, correspondente às restantes células do mesmo conjunto fundamental.

Por analogia com a regras dos dois dígitos, pode formular-se **a regra dos k dígitos**:

Se os dígitos $d_1, d_2, \ldots, d_k$ formarem um subconjunto independente, associado às células $c_1, c_2, \ldots, c_k$ dum certo conjunto fundamental, então nos conjuntos de possibilidades dessas células não poderão figurar outros dígitos, além de $d_1, d_2, \ldots, d_k$.

Exemplo 6. Suponhamos que A, B, C são células da mesma linha, tais que $p(A) = \{2, 3, 5\}$, $p(B) = \{1, 3, 4\}$, $p(C) = \{1, 2, 6\}$. Suponhamos ainda que os dígitos 1, 2, 3 não figuram nos conjuntos de possibilidades de nenhuma das restantes seis células da mesma linha. Então, os dígitos 1, 2, 3 formam um subconjunto independente (associado às células A, B, C). Uma vez que os dígitos 1, 2, 3, formam um subconjunto independente, ao aplicar a **regra dos três dígitos**, os conjuntos de possibilidades das células associadas a este subconjunto passariam a ser $p(A) = \{2, 3\}$, $p(B) = \{1, 3\}$, $p(C) = \{1, 2\}$.

É importante assinalar o seguinte. De cada vez que se deteta um subconjunto independente de k células ou de k dígitos e se aplica a regra correspondente, o conjunto fundamental considerado fica dividido em **dois subconjuntos** independentes (um com k células, outro com $9-$ k), conjuntos esses que podem, por sua vez, estar (ou vir a ser) subdivididos, se o conjunto de possibilidades de uma das células vier a ser reduzido. Por isso, ao reduzir os conjuntos de possibilidades das células, estamos também a definir partições do conjunto fundamental, em subconjuntos cada vez mais pequenos.

5 COMPLEMENTARIDADE DE SUBCONJUNTOS INDEPENDENTES

Como foi referido na secção anterior, existem subconjuntos independentes de k células e de k dígitos, com k entre 2 e 8. Por outro lado, é de referir que qualquer célula resolvida (com um conjunto singular de possibilidades) pode ser considerada um subconjunto independente de uma célula. Do mesmo modo, se numa certa célula A se verifica um caso de única ocorrência do dígito d, também se pode dizer que esse dígito forma um subconjunto independente, associado à céula A. Desse modo, as regras de resolução de células resultantes do conjunto de possibilidades singular e da ocorrência única podem ser consideradas regras de *uma célula* e de *um dígito*.

Assim, verificamos que existe uma relação importante entre os **subconjuntos independentes de uma célula** (células resolvidas) e os **subconjuntos independentes de oito dígitos**, que passamos a referir. Se a célula c_1 de um certo conjunto fundamental tiver o conjunto de possibilidades $p(c_1)=\{d_1\}$, então os restantes oito dígitos $d_2, ..., d_9$ vão figurar apenas nos conjuntos de possibilidades das células $c_2, ..., c_9$, pelo que, segundo a nossa definição , esses oito dígitos vão formar um **subconjunto independente**, associado às referidas células.

Do mesmo modo, quando se verifica a *única ocorrência do dígito* d_1 na célula c_1, de tal maneira que esse dígito forma um subconjunto independente, então as restantes oito células do mesmo conjunto fundamental formam um subconjunto independente (já que a reunião dos conjuntos de possibilidades dessas oito células produz os oito dígitos $\{d_2, ..., d_9\}$).

Destas duas propriedades podemos concluir o seguinte:

- é equivalente aplicar a um certo conjunto fundamental uma regra de uma célula ou uma regra de oito dígitos.

- é equivalente aplicar a um certo conjunto fundamental uma regra de um dígito ou uma regra de oito células.

Neste sentido, podemos dizer que existe uma *relação de complementaridade entre subconjuntos independentes* de um e de oito elementos. Obviamente, os subconjuntos independentes de um elemento (uma célula ou um dígito) são muito mais fáceis de detetar, por isso, podemos descartar a pesquisa de subconjuntos independentes de oito células ou de oito dígitos.

Generalizando um pouco, podemos constatar que existe a mesma relação de complementaridade entre subconjuntos independentes de k células e subconjuntos independentes de $9-k$ dígitos ($k=1,2,\ldots,8$). Mais precisamente, se as células $c_1,\ldots,c_k$ de um conjunto fundamental formarem um subconjunto independente, de tal modo que a reunião dos conjuntos de possibilidades dessas células produz o conjunto $\{d_1,\ldots,d_k\}$, então o conjunto de dígitos $\{d_{k+1},\ldots,d9$ $\}$ também forma um subconjunto independente (de $9-k$ dígitos).

As relações de complementaridade e a equivalência entre a aplicação da regra das k células e a regra dos $9-k$ dígitos levam-nos à seguinte conclusão.

Para detetar todos os subconjuntos independentes de um certo conjunto fundamental, e aplicar todas as regras possíveis, basta detetar todos os subconjuntos independentes de uma a quatro células e todos os subconjuntos independentes de um a quatro dígitos, e aplicar as regras correspondentes.

Por outras palavras, não é necessário aplicar regras com mais de quatro células ou de quatro dígitos, uma vez que essas regras são equivalentes a outras, com menor número de elementos.

Esta conclusão tem um grande significado prático, quando se trata de aplicar sistematicamente as regras de simplificação, até conseguir resolver um dado problema de SUDOKU.

6 ALGORITMO DE RESOLUÇÃO

Uma vez conhecidas todas as possíveis regras de simplificação do SUDOKU, podemos formular uma estratégia que nos permite, em princípio, resolver qualquer problema de SUDOKU (desde que ele tenha solução única).

Para isso, vamos supor que sabemos executar as seguintes operações elementares:

- dado um certo conjunto de células preenchidas, construir os conjuntos de possibilidades de todas as outras células.

- conhecidos os conjuntos de possibilidades das células de um conjunto fundamental, detetar todos os subconjuntos independentes de uma a quatro células e de um a quatro dígitos.

▶ encontrado um certo subconjunto independente, aplicar a respetiva regra (transformando os conjuntos de possibilidades das células envolvidas).

O algoritmo consiste em aplicar sucessivamente estas três operações , até que não seja possível aplicar mais nenhuma das regras acima descritas.

Note-se que o processo de resolução terá sempre de ser um processo iterativo e que o número de passos a realizar não é, à partida, conhecido.

De facto, de cada vez que se aplica uma regra a um certo conjunto fundamental, isso produz alterações nos conjuntos de possibilidades não só desse conjunto fundamental, mas também de outros que fazem parte da mesma tabela. Por isso, depois de aplicar uma regra, é sempre necessário atualizar os conjuntos de possibilidades de todas as células afetadas. Por sua vez, sempre que se altera os conjuntos de possibilidades de alguma célula, podem surgir novos subconjuntos independentes nos conjuntos fundamentais a que essa célula pertence (não esquecer que cada célula pertence a três conjuntos fundamentais: uma linha, uma coluna e um quadrado).

Para ilustrar o algoritmo proposto, vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 7. Consideremos o conjunto fundamental descrito na tabela 1. Para sermos concisos, neste exemplo analisaremos apenas um conjunto fundamental, embora, como se sabe, num problema de SUDOKU seja necessário considerar 27 conjuntos fundamentais.

Tabela 1. Descrição do exemplo 7. Cada coluna da tabela representa os conjuntos de possibilidades das células depois de efetuado o passo correspondente.

Célula	Tabela inicial	Passo 1	Passo 2	Passo 3
A	2, 3	2, 3	2, 3	2, 3
B	1, 3	1, 3	1, 3	1, 3
C	1, 2	1, 2	1, 2	1, 2
D	2, 3, 4	2, 3, 4	**4**	**4**
E	1, 3, 5, 6	1, 3, 5, 6	**5, 6**	**5, 6**
F	1, 2, 5, 6	1, 2, 5, 6	**5, 6**	**5, 6**
G	1, 2, 4, 9	**9**	**9**	**9**
H	1, 3, 5, 7, 8	1, 3, 5, 7, 8	**5, 7, 8**	**7, 8**
I	2, 6, 7, 8	2, 6, 7, 8	**6, 7, 8**	**7, 8**

Suponhamos que na configuração inicial os conjuntos de possibilidades das nove células são os que se enumeram na segunda coluna desta tabela.

Pela análise destes conjuntos de possibilidades, concluímos que a regra da única ocorrência se aplica à célula *G*, já que o dígito 9 figura apenas no conjunto de possibilidades desta célula. Assim, neste caso, o primeiro passo da resolução consiste em aplicar esta regra, o que nos leva à resolução da célula *G* (o conjunto de possibilidades desta célula fica reduzido ao número 9, como se vê na terceira coluna da tabela).

O segundo passo da resolução consiste em detetar que as células *A, B, C* formam um subconjunto independente, tal que a reunião dos seus conjuntos de possibilidades resulta no conjunto {1, 2, 3}. Consequentemente, ao aplicar a regra das três células, os conjuntos de possibilidades passam a ter a composição indicada na quarta coluna. Em particular, verifica-se que a célula *D* fica resolvida com o número 4.

Analisando os conjuntos de possibilidades resultantes do segundo passo, verifica-se que as células *E, F* formam um subconjunto independente, com o conjunto de possibilidades {5, 6}. Assim, para efetuar o terceiro passo da resolução, aplica-se a regra das duas células, o que nos leva aos conjuntos de possibilidades que constam da última coluna.

Analisando esta coluna, verifica-se que o grupo fundamental ficou decomposto em cinco subconjuntos independentes: {*A, B, C*}, {*D*}, {*E, F*}, {*G*}, {*H,I*}. Nenhum destes subconjuntos independentes contém um subconjunto independente menor, pelo que nesta fase não é possível realizar qualquer outra transformação neste grupo fundamental. Entretanto, as células *A, B, C, E, F, H, I* continuam por resolver. Essas células poderão vir a ser resolvidas, se os seus conjuntos de possibilidades forem reduzidos, em consequência de transformações realizadas noutros grupos fundamentais.

Assim, o passo seguinte da resolução do problema seria atualizar os conjuntos de possibilidades das células dos outros conjuntos fundamentais, e passar a analisar um desses conjuntos.

O Exemplo 7 mostra-nos como aplicar as regras de resolução a um conjunto fundamental, decompondo-o no maior número possível de subconjuntos independentes. Mas não permite responder à seguinte questão: será possível através deste algoritmo resolver totalmente qualquer problema de SUDOKU?

A resposta é: **sim, é possível, desde que o problema**

tenha solução única. Para o provar, baseamo-nos nos seguintes argumentos. Como vimos, a sucessiva aplicação do algoritmo permite-nos decompor cada conjunto fundamental em subconjuntos independentes cada vez mais pequenos. Este processo termina quando se verifica uma das seguintes três situações :

1. Cada grupo fundamental fica decomposto em nove sub-grupos independentes de uma célula. Neste caso, o problema fica resolvido.
2. Após realizadas todas as transformações possíveis em todos os conjuntos fundamentais, e depois de actualizados os conjuntos de possibilidades de todas as células da tabela, restam subconjuntos independentes com mais do que uma célula. Neste caso, o problema admite múltiplas soluções. Com efeito, a existência de um subconjunto independente não singular implica que existem diferentes possibilidades de preencher a tabela.
3. Numa certa etapa do processo ,surge um conjunto de possibilidades vazio. Neste caso, o problema é evidentemente impossível (não tem solução).

7 CONCLUSÃO

Neste texto não foi tratada uma questão importante: a **eficiência** do algoritmo descrito. Com efeito, para a prática não basta ter a garantia de que um certo algoritmo nos conduz à solução do problema. É essencial ter uma estimativa do número de operações que a resolução exige. Esta é uma questão complexa para o problema em causa.

Com efeito, a prática mostra que a rapidez da resolução pode variar muito para o mesmo problema. Ela depende, entre outras coisas, da ordem pela qual são considerados os conjuntos fundamentais. Uma regra heurística simples que pode ajudar bastante é a seguinte: começar por analisar os conjuntos fundamentais que têm mais células resolvidas.

Finalmente, poder-se-á objetar que o algoritmo aqui descrito é demasiado complicado e que os problemas de SUDOKU podem ser resolvidos sem tanto formalismo. Isso é verdade, até certo ponto. Quando se trata de problemas de dificuldade baixa ou média, uma abordagem 'intuitiva' poderá eventualmente ter sucesso. Mas para problemas de dificuldade elevada, a experiência de cerca de dez anos diz-me que a garantia do sucesso está numa abordagem rigorosa do problema, isto é, em termos matemáticos, como aqui se tentou fazer.

REFERÊNCIAS

[1] G. McGuire, B. Tugemann; G. Civario, *There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem*. Arxiv.org, janeiro 2012.

[2] H.H. Linand I-C. Wu., *No 16-clue Sudoku puzzles*, by sudoku@vtaiwan project, setembro 2013.

[3] D. Berthier, *The Hidden Logic of Sudoku*. LULU PR. p. 76 N. ISBN 1-84753-472-4, 2007.

[4] F. Jarvis, *Sudoku enumeration problems*. Frazer Jarvis's home page, 2006.

SOBRE O AUTOR

Pedro M. Lima é docente do Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico e investigador do Centro de Matemárica Computacional e Estocástica da Universidade de Lisboa