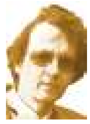
O ALBERTO DESCOBRE UMA FAMOSA CURVA



Alexander Kovačec
Universidade de Coimbra
kovacec@mat.uc.pt

Sócrates maça o escravo de Meno com questões, até que ele descubra por si sozinho a relação entre comprimento de lado e área dum quadrado; Galileu, no seu *Diálogo*, deixa discutir Salviati, Sagredo e Simplício sobre dois sistemas do Mundo; e Polya interpela no seu livrinho *Como Resolver Problemas* por intermédio dum professor um simples 'aluno'. Todos têm um mesmo objetivo: pela técnica de questões criteriosamente escolhidas e argumentos pro e contra, aproximam os parceiros da conversa, pouco a pouco, ao reconhecimento de factos científicos. Levamos assim o Alberto à descoberta da catenária! Não é preciso muito mais do que o que está nos programas de Física e de Matemática A do Secundário.

Professor (P): Caro Alberto, visto que tanto te interessas pela física como pela matemática e já leste até sozinho um pouco num manual de Análise Matemática, como sempre fazem alguns Délficos, levo-te estes dias à descoberta da equação da catenária: daquela curva que é assumida por uma corrente fixada em dois pontos e que, de resto, livremente está pendurada numa parede vertical.

Alberto (A): Isto deve ser complicado. Não faço ideia de como eu podia, com os meus modestos conhecimentos, chegar a descobri-la! Mas a curva tem importância. Vemo-la nas linhas de alta tensão, nos cabos que fixam os barcos aos cais, etc. Parecem-me parábolas.

P: Já Galileu (1564-1642) suspeitava de que talvez fossem parábolas. Mas não é assim tão simples: a equação correta da catenária foi descoberta apenas 50 anos após a sua morte. Experimenta em casa. Marca o vértice (o ponto mais baixo da corrente) e traça uma parábola que passe pelo mesmo vértice e os dois pontos fixos duma catenária, e compara as curvas.

A, um dia depois: Fiz como sugeriu; nas várias experiências, as diferenças são mínimas. A corrente está quase sempre um pouco abaixo da correspondente parábola. Por isso, se calhar, as diferenças não são todas atribuíveis a imperfeições da corrente ou a imprecisões com que tomamos medidas.

P: Estás a ver! Um cálculo exato deverá também levar a uma fórmula cujo gráfico se aproxima de baixo à parábola. Vamos então matematizar o assunto. Já te mencionei o que fazemos quando um problema parece ser demasiado complexo...

A: Pois. Disse-me que devemos pensar num problema mais simples...; um análogo...; ou algum problema que tenha algo a ver com aquilo que queremos resolver.

P: E então...

A: Bom, podemos, por exemplo, pensar num fio de peso negligenciável e alguns pesos fixados nele. Isto vai dar de certeza uma linha quebrada. Talvez isto ajude... para clarificar a situação?

P: Boa ideia! Quantos pesos queres pendurar?

A: Disse-nos que devemos pensar na situação mais simples que não seja imediatamente evidente.... Ora, se eu puser apenas um peso, então acho que, independentemente do peso, a linha quebrada vai ser sempre a mesma – enquanto o fio não rebentar, claro. Por isso, opto por dois pesos.

P: Mas mesmo com um só peso, podemos perguntar-nos que forças o mantêm no sítio onde está.

A: A pergunta parece-me um pouco estúpida... – peço desculpas – ... Está onde está porque, se o peso é fixado ou pendurado num ponto P em distância r_0 do ponto fixo A e r_1 do ponto B, digamos, P deve estar evidentemente num dos pontos de interseção das circunferências de centros em A e B e raios r_0, r_1, respetivamente. E, evidentemente, não pode ficar no ponto superior, pois daí iria cair.

P: Ora! Não fazemos apenas geometria! O ponto P tem alguma liberdade para se mexer, mas fica no sítio... Devíamos estranhar. Segundo Newton (1642-1727), isto acontece apenas em situações bastante especiais ...

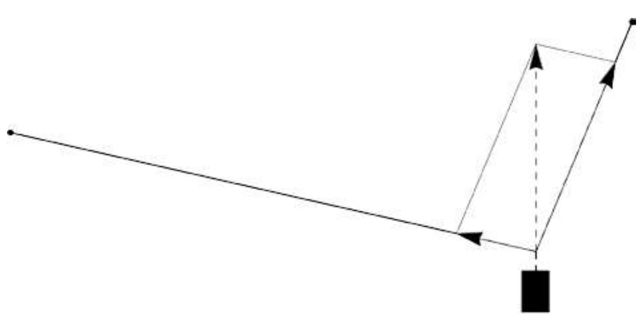
A: Pois, está bem... a soma das forças que nele atuam deve ser zero.

P: E estas são?

A: O peso puxa para baixo, mas forças transmitidas pelo fio fixado em A e B equilibram este peso.

P: E tu podes determinar estas forças segundo uma lei que já aprendeste há algum tempo!

A: Pela regra do paralelogramo das forças?



P: Isso mesmo! Isto significa...?

A: Que as tensões nos fios devem ser tais que se tem a figura mostrada: a soma vetorial das forças que atuam nos fios deve ser igual ao negativo da força vertical exercida pelo peso.

P: Muito bem! Agora podemos atacar o caso de dois pesos. Este caso é, de facto, mais complicado; a linha quebrada que o fio vai assumir não depende apenas das distâncas $|AP_1|$, $|P_1P_2|$, $|P_2B|$, mas sobretudo também da magnitude dos pesos. Introduz uma notação que seja facilmente generalizável para n pesos, se possível.

A: Bom. Para tratar dos pesos "em pé de igualdade" vou denotar os pontos fixos A, B por P_0 e P_3 – pois, em equilíbrio, parece-me que quaisquer dois pontos dos P_i podiam ser aqueles onde fixo a corrente – sem que o troço entre eles se modifique relativamente à situação anterior. A força que "puxa" o ponto P_i para P_{i+1} vou escrever como vetor $\vec{v}_i = \binom{x_i}{y_i}$. Vai ser, portanto, um vetor paralelo a $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$; ou seja, algum múltiplo real positivo deste vetor.
Estou já a pensar em cálculos que faremos num sistema cartesiano com eixo yy orientado no sentido contrário da força gravítica.

P: OK. Parece-me razoável. E como queres escrever a força vertical que atua no i-ésimo ponto?

A: Se o peso, enquanto escalar positivo, for p_i, o vetor que indique a correspondente força deve ser escrito $\vec{p}_i = \binom{0}{-p_i}$, pois não tem componente horizontal; e, sua componente vertical é em sentido contrário do eixo yy. Este facto é indicado pelo sinal negativo.

P: Muito bem. São escolhas notacionais simples e naturais. Usando a tua notação, o facto de que em equilíbrio o ponto P_1 não se mexe significa o quê?

A: Significa que a soma das forças que sobre ele atuam é o vetor zero. Ou seja, significa que temos algo como

$$? + \begin{pmatrix} x1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

P: E não sabes o que pôr no lugar com o "?" ?

A: Não.

Fonte da Imagem: *https://www.wikihow.it/Giocare-con-i-Cani#/Immagine:Play-With-Dogs-Step-15.jpg*

P: Ora pensa: quando brincas com o teu cãozinho, tu puxando numa extremidade duma corda, ele na outra, os dois ficam em equilíbrio porque...

A: ... porque nós dois puxamos com a mesma força em sentidos contrários. Não é assim?

P: Pois! E, segundo as tuas definições, $\binom{x_0}{y_0}$ indica a força exercida no ponto P_0 em direção a P_1. Agora deve ser claro como a equação para o ponto P_1 se lê. A equação para o ponto P_2 será análoga.

A: OK. Portanto as equações vão ser, julgo eu:

$$\begin{aligned} -\binom{x_0}{y_0} + \binom{x_1}{y_1} + \binom{0}{-p_1} &= \binom{0}{0} \\ -\binom{x_1}{y_1} + \binom{x_2}{y_2} + \binom{0}{-p_2} &= \binom{0}{0}. \end{aligned}$$

E se tivéssemos mais pontos a considerar, teríamos mais tais equações. Mas assim entram cada vez mais incógnitas x_i, y_i.

P: Pois, parece assustador. Mas olha para as equações. Em princípio, podes expressar qualquer $\binom{x_i}{y_i}$ por $\binom{x_0}{y_0}$ só.

A: É verdade! Da primeira equação, obtenho $\binom{x_1}{y_1}$; e substituindo isto na segunda equação, obtenho $\binom{x_2}{y_2}$. Assim

$$\begin{aligned} \binom{x_1}{y_1} &= \binom{x_0}{y_0+p_1} \\ \binom{x_2}{y_2} &= \binom{x_0}{y_0+p_1+p_2} \end{aligned}$$

P: Portanto, tens agora, como sendo as únicas indeterminadas, apenas as entradas de $\binom{x_0}{y_0}$. Ora, não te esqueças, os $\binom{x_i}{y_i}$ são os vetores das tensões nos fios. Mas o que sobretudo nos interessa são as posições dos vértices P_1, P_2, ... do polígono...

A: Mas noto que x_0, y_0 ainda ficam indeterminados...

P: Bom, as equações obtidas são genéricas. São válidas para quaisquer fios com dois pesos, sejam quais forem as suas posições, sejam quais forem as suas magnitudes...; e sejam quais forem os pontos onde a corrente é fixada.

A: Estou a ver. Portanto, devemos dar tanto as posições A, B, ou seja de P_0 e P_3 dos pontos fixos como os comprimentos r_0, r_1, r_2 dos troços, como, finalmente, os próprios pesos p_1, p_2. Só dado todo este *input* em forma numérica podemos calcular a linha poligonal que o fio irá assumir.

P: Pois. E, supondo isto tudo conhecido, como podes saber os vértices?

A: Já sabemos que as forças atuam segundo a orientação dos troços; ou seja, $\overrightarrow{P_0P_1}$ será paralelo a $\binom{x_0}{y_0}$. $\overrightarrow{P_1P_2}$ será paralelo a $\binom{x_1}{y_1}$, etc. Mas são vetores de forças; a sua norma tipicamente não reflete os comprimentos dos troços.

P: Ora se tens um vetor não nulo qualquer, como podes dar-lhe o comprimento desejado sem mudar a sua orientação?

A: Divido o vetor pela sua norma e depois multiplico-o pelo o comprimento que quero. E a norma de um vetor é dada pela raiz quadrada da soma dos quadrados das suas componentes.

P: Então, obténs para os vértices da linha poligonal que equações?

A: Obtenho P_1 adicionando a P_0 o vetor de direção $\binom{x_0}{y_0}$ e de comprimento r_0. P_2, P_3 obtenho de formas análogas e assim tenho o sistema

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + \frac{r_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\binom{x_0}{y_0} \\ P_2 &= P_1 + \frac{r_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\binom{x_1}{y_1} \\ P_3 &= P_2 + \frac{r_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\binom{x_2}{y_2}. \end{aligned}$$

P. Ora P_3 é, no nosso exemplo de dois pesos, igual a...

A: É igual a B. Portanto, será também dado.

P: Exatamente. Assim podes agora, em princípio, calcular a tua linha poligonal. Escreve uma equação cuja solução te permita calcular a posição dos vértices!

A: Bom, vejo que $x_0 = x_1 = x_2$, e $y_1 = y_0 + p_1$, $y_2 = y_0 + p_1 + p_2$. p_1 e p_2 conheço. Por isso, sabendo também o vetor $\binom{o_1}{o_2} = \overrightarrow{AB}$, isto é,

$B - A = P_3 - P_0 = (P_3 - P_2) + (P_2 - P_1) + (P_1 - P_0)$, obtenho do sistema acima uma equação vetorial. Se eu introduzir a expressão

$$D(x,y) = \frac{r_0}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{r_1}{\sqrt{x^2+(y+p_1)^2}} + \frac{r_2}{\sqrt{x^2+(y+p_1+p_2)^2}},$$

onde escrevi x, y em vez de x_0, y_0, tenho de resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} o_1 &= xD(x,y) \\ o_2 &= yD(x,y) + \frac{r_1 p_1}{\sqrt{x^2+(y+p_1)^2}} + \frac{r_2(p_1+p_2)}{\sqrt{x^2+(y+p_1+p_2)^2}}. \end{aligned}$$

Por exemplo: Supondo $A = (0, 1.3)$, $B = (4.5, 2.1)$, $r_0 = 1.5, r_1 = 2.4, r_2 = 1.8$, $p_1 = 1$, $p_2 = 5$, temos

$$D(x,y) = \frac{1.5}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2.4}{\sqrt{x^2+(1+y)^2}} + \frac{1.8}{\sqrt{x^2+(6+y)^2}},$$

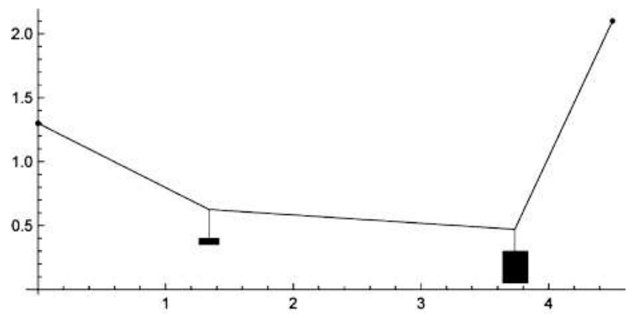
e devemos resolver o sistema seguinte em ordem a x e y.

$$\begin{aligned} 4.5 &= xD(x,y) \\ 0.8 &= yD(x,y) + \frac{2.4}{\sqrt{x^2+(1+y)^2}} + \frac{10.8}{\sqrt{x^2+(6+y)^2}}, \end{aligned}$$

Não me parece fácil resolver este sistema.

P: Certo. Provavelmente não se pode expressar x, y de forma elementar em termos dos símbolos o_1, o_2, p_1, p_2, r_0, r_1, r_2. Mas se estas grandezas são conhecidas, então este tipo de sistema resolve-se com métodos numéricos; e para mais pesos existem óbvias extensões deste sistema. Em Mathematica©, por exemplo, basta escrever umas poucas linhas para o resolver. A figura abaixo foi produzida com este código, usando os valores numéricos mencionados. Podes verificar que os valores que tiras da figura resolvem o sistema. E, em casa, verifica que a Natureza chega à mesma solução!

A: Caso me torne engenheiro da construção civil, tenho aqui uma boa opção. Resultados deste género, julgo eu, podem ser úteis na construção de pontes de suspensão?



P: Com certeza! Mas voltemos ao nosso problema principal. Decorre das nossas equações uma coisa que é importante perceber: a componente horizontal das tensões que atuam no fio é em todos os troços a mesma: x_0.

Agora imagina que todos os pesos são iguais e estão pendurados em distâncias iguais. Por exemplo: o fio tem 1 metro de comprimento e a cada centímetro colocamos um peso de 1 grama. Mais: assume que o primeiro centímetro define um troço horizontal. Diz-me os declives que teremos nos troços que definem o primeiro, o segundo, o terçeiro centímetro...

A: Generalizando equações atrás obtidas, temos no caso de n pesos

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_i \end{pmatrix}, i = 0, 1, ..., n-1$$

e o "declive" deste vetor é, portanto,

$$(y_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_i)/x_0.$$

Declive zero no primeiro centímetro significa $y_0 = 0$.Depois, temos de calcular o "declive" do vetor $\binom{x_1}{y_1}$. Sendo $p_1 = ... = p_n = 1$, obtemos declive $1/x_0$, depois $2/x_0$, depois, $3/x_0$... Estou a ver: O declive cresce essencialmente linearmente com a distância percorrida ao longo da curva.

P: Viste uma coisa muito importante. O nosso arranjo assemelha-se em muito a uma corrente. A razão é que cada elo de uma corrente regular tem o mesmo peso. Se definirmos a abcissa como sendo 0 no ponto onde a catenária tem tangente horizontal, então o declive da catenária cresce linearmente com o comprimento percorrido ao longo dessa, partindo da abcissa 0.

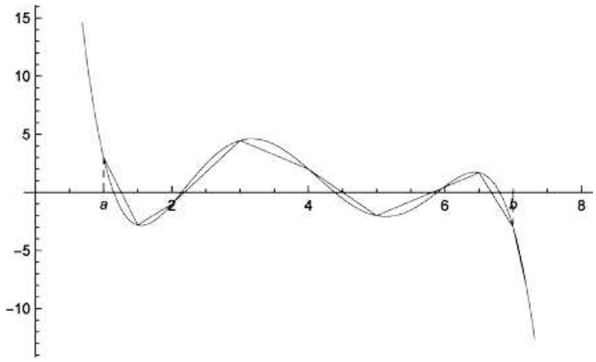
A: Ou seja, se a catenária for dada pela função $x \mapsto f(x)$, e $l(x)$ for o comprimento dessa curva até o seu ponto de abcissa x, vamos ter uma equação da forma $l(x) = c \cdot f'(x)$, onde c é um fator de proporcionalidade positivo, pois o declive cresce com o comprimento. Tal como é o caso com os nossos polígonos.

P: Exato.

A: Mas como determino $l(x)$?

P: Olha a seguinte figura do gráfico de uma função f. Concordas que o comprimento da linha poligonal inscrita aproxima bem o comprimento da própria curva?

A: Obviamente.



P: E que, portanto, é natural definir o próprio comprimento da curva como o limite de comprimentos de polígonos inscritos, se tornarmos cada vez mais curtos os seus segmentos?

A: Sim, se este limite existir.

P: OK. Aceita que para curvas suficientemente afáveis se prova que, seja qual for a sucessão de partições cada vez mais finas que considerermos, se obtém um limite bem definido e que este limite não depende da sucessão. Este limite comum define-se como o comprimento da curva. Vamos supor então que um intervalo $[a, b]$ é dividido em n subintervalos iguais; todos de comprimento $\Delta = (b-a)/n$. Seja x a abcissa de um ponto qualquer da partição. Quais são as coordenadas do ponto da curva e do seu sucessor? E qual é o comprimento do segmento que liga estes dois pontos?

A: Os pontos são $(x, f(x))$ e $(x+\Delta, f(x+\Delta))$; e segundo Pitágoras, o comprimento que liga estes pontos é dado pela raiz quadrada de $(x+\Delta-x)^2 + (f(x+\Delta)-f(x))^2$.

P: E como podemos, segundo o cálculo diferencial, representar $f(x+\Delta) - f(x)$?

A: Se f for continuamente diferenciável, então existe um ξ no intervalo $]x, x+\Delta[$ tal que $f'(\xi) = \frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta}$.

P: Portanto, o pedido comprimento é...

A: $\sqrt{\Delta^2 + f'(\xi)^2\Delta^2} = \sqrt{1+f'(\xi)^2}\Delta$

P: E, portanto, o comprimento do polígono de, digamos n segmentos associado a f, é dado por ...

A: ... $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+f'(\xi_i)^2}\Delta$, onde cada ξ_i é um ponto adequado no i-ésimo intervalo.

P: E, como dissemos, quando n vai para infinito, estas somas convergem. Elas dizem-se...

A: Somas de Riemann!

P: E, como convergem, o limite escreve -se no caso do intervalo considerado $[a, b]$ por...

A: $\int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2}dt$.

P: Portanto, se medirmos o comprimento da curva do ponto 0 até ao ponto x, e, a partir de agora voltando a supor que f representa a catenária, teremos para o teu $l(x)$:

A: $l(x) = \int_0^x \sqrt{1+f'(t)^2}dt$.

P: Muito bem, estamos a aproximar-nos do fim. Relativamente à função integranda $\sqrt{1+f'(t)^2}$, a função $l(x)$ é uma...

A: Primitiva!

P: Aprendeste um teorema que se diz teorema fundamental do cálculo. Se derivarmos a primitiva l em x, obtemos o quê?

A: Obtemos $l'(x) = \sqrt{1+f'(x)^2}$.

P: Por outro lado, $l'(x)$ é, segundo tua equação inicial $l(x) = cf'(x)$, acima encontrada igual a ...

A: $cf''(x)$. Ah! Portanto, a nossa função f satisfaz a equação $cf'' = \sqrt{1+f'^2}$, e portanto também a equação

$$*_0 : c^2 f''^2 - f'^2 = 1.$$

Alguém uma vez me disse que uma tal equação em que entram derivadas de funções diz-se uma equação diferencial.

P: Certíssimo! Agora, como ainda não aprendeste métodos sistemáticos para resolver tais equações, deves usar os poucos conhecimentos que tens e a imaginação para a resolver. Repara que do lado direito da equação $*_0$ está uma constante. Se derivas $*_0$ mais uma vez, obténs, portanto...?

A: Segundo a regra do produto e porque constantes têm derivada 0, obtenho,

$$c^2 2f''f''' - 2f'f'' = 0, \quad \text{ou seja,} \quad f''(c^2 f''' - f') = 0.$$

Isto significa que para cada x temos $f''(x) = 0$ ou $c^2 f'''(x) - f'(x) = 0$. Mas acima vimos $cf'' = \sqrt{1 + f'^2}$, o que é evidentemente positivo.

Por isso, temos

$$*_1 : c^2 f'''(x) - f'(x) = 0.$$

E agora?

P: Lembra-te: se não sabemos fazer progressos,...

A: ... olhamos, por exemplo, para casos especiais. Acho muito estranho a derivada de *f* ser múltiplo de uma outra derivada de *f*. Mas, espere lá! Quando falámos da função exponencial achei muito curioso que exista uma função, e^x, que é igual à sua própria derivada. Assim é claro que, para $c = 1$, e^x é uma solução. Possivelmente, alguma modificação de e^x resolve a equação?

P: Então brinca um pouco!

A: A modificação mais óbvia de e^x é $f(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$. Neste caso, obtemos $f' = \alpha\beta e^{\beta x}$, $f'' = \alpha\beta^2 e^{\beta x}$, $f''' = \alpha\beta^3 e^{\beta x}$. Substituindo estas derivadas na equação $*_1$, obtemos $(c^2\alpha\beta^3 - \alpha\beta)e^{\beta x} = 0$, ou seja, $c^2\beta^2 = 1$, pois supondo $\alpha\beta = 0$, obtemos apenas que *f* é constante; solução que evidentemente podemos descartar. Assim, $c\beta = 1$ ou $c\beta = -1$. Portanto para α_1, α_2, γ_1, γ_2 quaisquer, as funções $f_1 = \alpha_1 e^{x/c} + \gamma_1$ e $f_2 = \alpha_2 e^{-x/c} + \gamma_2$ são soluções de $*_1$.

P: Pode dizer isto de forma mais elegante usando o conceito da "combinação linear"?

A: Parece-me claro que toda a combinação linear das funções base 1, $e^{x/c}$, $e^{-x/c}$, ou seja, qualquer função da forma $\gamma + \alpha_1 e^{x/c} + \alpha_2 e^{-x/c}$, resolve a equação. Isto é devido a que a k-ésima derivada de uma combinação linear de funções suficientes vezes diferenciáveis é a combinação linear das k-ésimas derivadas destas funções com os mesmos coeficientes. Fiz exercícios relativamente a questões deste género nas páginas 322 e 368 em [6].

P: Muito bem. A tua observação relativamente a $*_1$ é correta porque nesta equação não entram quadrados nem potências superiores de derivadas de *f*. A equação $*_1$ é linear homogénea de ordem três e de coeficientes constantes. Sabes de [6] se calhar que tais equações têm um espaço de solução de dimensão três; portanto, a solução por ti proposta é a geral. E agora lembra-te de duas coisas: obtivemos a equação $*_1$ porque derivámos $*_0$. Mas queríamos resolver esta última equação. Sabemos apenas que toda a funcão três vezes diferenciável que satisfaz $*_0$ satisfaz $*_1$. Mas pode haver funções três vezes diferenciáveis que satisfazem $*_1$ mas que não satisfazem $*_0$. Em segundo lugar podemos esperar fórmulas mais "limpas" se procurarmos aquelas soluções de $*_0$, que também tenham tangente horizontal no ponto $x = 0$. Pois destas fórmulas podemos esperar que mostrem a simetria da catenária, clara por razões físicas, também a nível formal.

A: Está bem. Se eu considerar a solução geral

$$f = \gamma + \alpha_1 e^{x/c} + \alpha_2 e^{-x/c},$$

obtenho

$$f' = \tfrac{\alpha_1}{c} e^{x/c} - \tfrac{\alpha_2}{c} e^{-x/c} \text{ e } f'' = \tfrac{\alpha_1}{c^2} e^{x/c} + \tfrac{\alpha_2}{c^2} e^{-x/c}.$$

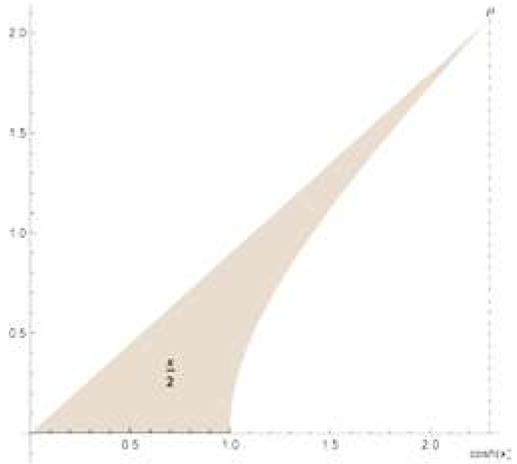
Substituindo estas derivadas em $c^2 f'' - f'^2 = 1$, então muita coisa se corta e fica $4\alpha_1\alpha_2 = c^2$. Agora, querendo tangente horizontal em 0, $f'(0) = 0$, ou seja, $\frac{\alpha_1}{c} e^{0/c} - \frac{\alpha_2}{c} e^{-0/c} = 0$. Assim $\alpha_1 = \alpha_2$, logo $\alpha_1 = \pm\frac{c}{2}$.

E assim a nossa curva é dada por

$$f = \tfrac{c}{2}(e^{x/c} + e^{-x/c}).$$

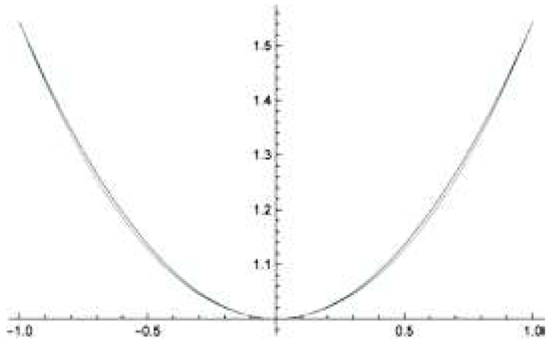
Os parâmetros γ, que suprimi, e c, não têm importância maior do ponto de vista teórico. São determinados, se bem entendo ideias anteriores, pelo comprimento do fio e os pontos onde este está fixado. Mais um parâmetro não aparece devido ao requerimento $f'(0) = 0$!. Este permitiria transladar a catenária ao longo da horizontal. Também noto que a outra escolha para α_1 dava, face a que $c > 0$, uma curva virada para baixo, o que evidentemente não é o caso. Se bem que num planeta com força gravítica repelente pudesse ser...

P: Fantástico! Esta equação é, de facto, a da catenária. Foi encontrada em resposta a um desafio de Jakob Bernoulli, em 1691, por Leibniz, Huyghens e Johann Bernoulli, dos maiores luminares do século XVII. Pondo $c = 1$, obtém-se a função $\cosh(x) = 1/2(e^x + e^{-x})$, que se diz cosseno hiperbólico de x, nome que provém do facto de que, se $x/2$ define a área sombrada limitada por uma hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, o eixo xx, e uma reta pela origem, tal como na figura mostrada, então $\cosh(x)$ é o comprimento do segmento da origem até à projeção do ponto P, interseção de reta e curva, sobre o eixo xx. Nota que o cosseno usual $\cos(x)$ podia ser analogamente



definido usando a área de um setor circular em vez do usual comprimento de um arco. O nome "catenária" aliás provém do latim "catena", que significa corrente.

A nossa dedução da catenária não é particularmente elegante. Saltámos a discussão de algumas subtilezas e podíamos ser acusados aqui e ali de falta de rigor. Mas foi mais importante mostrar-te os princípios que fundamentam a sua dedução e incentivar-te a fazer o uso máximo dos teus ainda modestos conhecimentos: numa palavra, treinar-te na resolução de problemas e acreditar nas tuas capacidades. Modernas deduções (ver, e.g. [1, p. 480]), chegam muito cedo a uma equação diferencial – usualmente diferente da nossa – e resolvem-na doutra maneira. Pode deduzir-se a catenária também de forma inteiramente diferente invocando os princípios minimais da Natureza. No caso presente procurar-se-ia a curva cujo baricentro tenha, dadas as óbvias restrições, a menor altura possível – ou seja, a curva que tenha energia potencial mínima – e aplicava-se o cálculo das variações, uma fascinante área da matemática criada por Euler (1707-1783) e Lagrange (1736-1813). Alguma da sua matemática e da sua história é contada em [4], [5]. A catenária tem várias ligações com outros objetos geométricos interessantes: Por exemplo, se perguntarmos qual a curva por dois pontos fixos que, por rotação em torno do eixo xx, gera uma superfície de área mínima, a solução, encontrada por cálculo das variações, é uma catenária. A evoluta da catenária, obtida cortando-a no seu vértice, define uma curva chamada tractriz, porque esta também se obtém puxando uma extremidade dum fio ao longo do canto de uma mesa, sendo que na outra extremidade está fixado um peso que escorrega sobre a mesa. A tractriz, por sua vez, quando rodada em torno desse canto, define uma superfície de revolução, dita pseudosfera, que tem curvatura gaussiana negativa constante. É a superfície "oposta" de uma esfera. E a pseudosfera foi usada em 1868 por Eugénio Beltrami (1835-1900) para construir um dos primeiros modelos de uma geometria não-euclidiana e, assim, definitivamente mostrar a sua existência... E talvez mais ligações surpreendentes existam! Bom, fiquem estes tópicos para vindouros estudos teus. Despeço-me por hoje, mostrando-te que uma parábola que tem as mesmas extremidades e o mesmo vértice que uma catenária fica muito perto dela: a catenária é a curva verde por baixo da parábola preta. Por números, por exemplo, $\cosh(0.6) = 1.1854$, enquanto a associada parábola $t \mapsto 0.543t^2 + 1$, tem no ponto 0.6 o valor 1.1954. (Atenção: A interseção dos eixos está no ponto (0, 1), $\cosh(x)$ não passa por (0, 0).)



REFERÊNCIAS

[1] A. S. Alves, *Mecânica Geral*, Coimbra, 1988.

[2] *Metas curriculares para o Ensino Secundário Matemática A. 12º ano.* Caderno de Apoio. A. Bivar, C. Grosso, F. Oliveira, L. Loura, M. C, Timóteo. Ver em particular as páginas 56, 58, 68, 71.

[3] A. Kovačec, "Justificação Matemática da Regra do Paralelograma na Física", *Gazeta de Matemática* 165, 2011.

[4] A. M. F. Louro e D. F. M. Torres, "Computação simbólica em Maple no Cálculo das Variações", *Boletim da SPM*, 59, 2008.

[5] H. Sussmann, "J. C. Willems: 300 anos de controlo otimal: da braquistócrona ao princípio do máximo", *Boletim da SPM*, 45, out. 2001.

[6] A. P. Santana, J. Queiró, *Introdução à Álgebra Linear*, Gradiva, 2010.

[7] *en.wikipedia.org*: sabe todo o resto.