



FABIO CHALUB
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

SOL E LUA À BEIRA-MAR

Escrevo estas linhas no final do verão. Verão é, evidentemente, sinónimo de praias. Para melhor aproveitar as horas à beira-mar, recomenda-se ter em mente o horário das marés. Afinal, uma maré alta significa uma estreita faixa de areia, enquanto na maré baixa temos mais espaço para esticar as pernas ao sol. Hoje, vamos, então, falar das marés. Um assunto que nos permite ir longe no espaço, sem sair do nosso areal favorito.

O nível do mar sobe e desce periodicamente, num movimento conhecido como *maré*. Conhecer a sua dinâmica em detalhes é fundamental para a navegação, a administração portuária, as pescas, etc. Mas também é fundamental para o lazer à beira-mar, seja para esticar as pernas num areal espaçoso, para um bom mergulho ou para prever a hora das melhores ondas.

A cada dia temos, em geral, duas marés altas e duas baixas. Numa primeira aproximação, a maré alta se dá-se ao longo da linha que une a Terra à Lua, enquanto a maré baixa ocorre na direção perpendicular. Vamos começar por discutir por que é assim. Veja, também a referência [1] para mais detalhes, em particular para o efeito fora do eixo que une os centros de massa.

Tanto a Lua quanto a Terra estão a rodar, e fazem-no na mesma direção. Imagine o nosso veranista olhar para o sol a pino ao meio-dia. Vinte e quatro horas depois, no mesmo local, estará novamente o sol a pino. A Lua, no entanto, esteve a rodar em torno da Terra e portanto já não se encontra no mesmo lugar. De facto, estará um pouco à frente. Logo, todos os efeitos que se devam à Lua, mesmo que apenas parcialmente, precisarão de um pouco mais de tempo para se repetirem.

Para estimar o tempo desta repetição, vamos considerar como linha de referência o eixo Sol-Terra. Evidentemente, este não está parado – gira 360 graus por ano. No entanto, a nossa análise será simplificada se o tomarmos por referencial. A pergunta que temos de formular é: qual o ângulo α tal que, no tempo em que a Lua gira em torno da Terra por um ângulo α , a Terra roda deste ângulo, mais uma volta completa, ou seja, de $2\pi + \alpha$. Quando isto acontece, a configuração Terra-Lua repete-se. Neste referencial, a Terra dá uma volta sobre si própria por dia, enquanto uma revolução completa da Lua em torno da Terra (o chamado mês sinódico) demora 29,53 dias.

Um pouco de conta se faz necessário: sejam ω_T e ω_L as velocidades angulares da Terra e da Lua, respetivamente. Nominalmente, estas velocidades são: $2\pi/\text{dia}$ e $2\pi/\text{mês}$. O tempo necessário para se deslocar de um certo ângulo é dado pela razão entre o ângulo percorrido e a velocidade angular. Desta forma, uma repetição aproximada da maré ocorrerá quando $\alpha/\omega_L = (2\pi + \alpha)/\omega_T$, ou seja,

$$\alpha = \frac{2\pi\omega_L}{\omega_T - \omega_L} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_T}{\omega_L} - 1}.$$

Fazendo as contas, encontramos que α é aproximadamente 0,2202 radianos. Assim, uma maré de mesma tipologia (alta ou baixa) ocorre cerca de 50 minutos mais tarde a cada dia. Veja a figura 1.

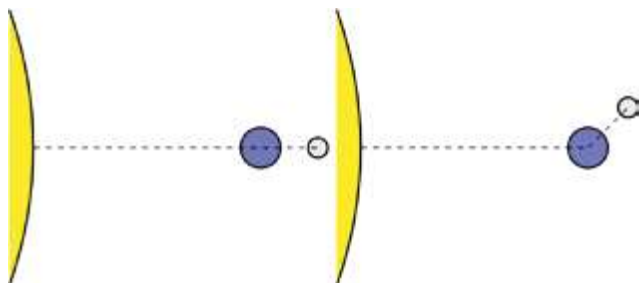


Figura 1. Num dia, o Sol, a Terra e a Lua estão alinhados. Após 24h, a Terra completou uma volta sobre si mesma e adiantou-se $1/365,25$ de volta em relação ao Sol. (Podemos ignorar este último efeito rodando novamente o referencial). No mesmo tempo, a Lua roda, em relação à Terra, uma fração de $1/29,53$ de uma volta completa. A Terra tem de girar mais um pouco para alcançar a mesma configuração da última maré alta.

Vamos agora refinar um pouco a nossa análise e considerar os efeitos conjuntos do Sol e da Lua. Apesar de estar mais longe, aquele tem muito mais massa e os seus efeitos são comparáveis. A forma mais simples de modelar a configuração relativa é levar em consideração a fase da Lua, cuja importância para prever as marés é notória.

É natural imaginar que quando o Sol e a Lua *puxam* a água na mesma direção, então as marés serão maiores. É o que ocorre nas luas cheia e nova. Quando a mesma está na fase crescente ou decrescente, então a maré será menos intensa. É isto, e mais uma grande coincidência, que nos permitirá prescitar o interior do Sol e da Lua a partir das praias da costa. O nosso argumento seguirá uma ideia original de [2].

Começamos por quantificar a forças motrizes da maré. Estas estão diretamente relacionadas com a gravidade, mas não são a mesma coisa. A gravidade, uma lei universal da física, afirma que "matéria atrai matéria". A maré ocorre por as diferentes partes de um corpo extenso serem atraídas com diferente intensidades. Efetivamente, a gravidade decai com o quadrado da distância, e desta forma as partes da Terra que estão mais próximas da Lua são atraídas com mais força do

que as que estão mais distantes. Assim, a força que causa a maré deve-se a variação da gravidade, e esta decai de intensidade com o cubo da distância, a derivada espacial da intensidade da força gravitacional. Veja a figura 2.

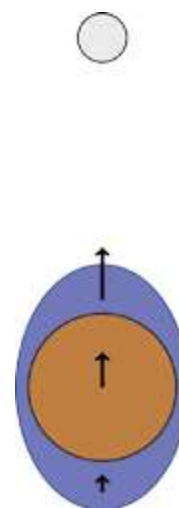


Figura 2. Efeito da Lua sobre a Terra, com uma parte rígida (em castanho) e uma parte fluida (azul), representando os oceanos. A parte mais próxima da Lua é atraída com mais força, enquanto a mais distante, com menor intensidade, sempre em comparação com a atração média, que se faz sentir no centro da Terra. Daí que a altura da linha d'água é maior tanto na região virada para a Lua, quanto na parte a esta oposta. A diferença da atração gravitacional nas diversas partes da Terra é que causa os efeitos das marés. (A bem da verdade, devido à inércia da massa d'água, a maior maré alta não se dá nem na lua cheia nem na lua nova, mas um ou dois dias depois destas, assim como, a cada dia, um atraso de alguns minutos ou horas é normal.) Para completar a figura, seria necessário incluir o Sol neste desenho.

Como a força gravitacional é proporcional ao produto das massas, então a força de maré devida ao Sol é dada por kM_S/R_S^3 , onde M_S e R_S são a massa do Sol e a distância Sol-Terra. Identicamente, a força de maré devida à Lua é dada por kM_L/R_L^3 , com M_L , e L a massa da Lua e a sua distância à Terra. Em ambos os casos, k é uma constante de proporcionalidade, idêntica para ambos os sistemas.

Agora vem o ponto interessante. Vistos da Terra, a Lua e o Sol têm aproximadamente o mesmo tamanho. A partir de uma relação de semelhança de triângulos, concluímos que a razão entre o raio do Sol e a sua distância à Terra é igual à razão entre o raio da Lua e a distância desta à Terra. Podemos então escrever as forças de maré do Sol

e da Lua como $\bar{k}M_S/r_S^3$ e $\bar{k}M_L/r_L^3$, onde \bar{k} é uma nova constante, idêntica em ambos os sistemas e r_S e r_L são os raios do Sol e da Lua.

Aproximando ambos por esferas, temos que a razão entre a massa e o cubo do raio é proporcional à densidade. Assim, a força da maré é proporcional à densidade de cada dos astros. É importante notar que isto ocorre apenas porque os tamanhos aparentes do Sol e da Lua são os mesmos, um facto fortuito.

Podemos, finalmente, inferir a densidade relativa dos mesmos acompanhando as flutuações do nível do mar hora após hora, dia após dia. A figura 3 mostra a altura da linha d'água no porto de Lisboa no mês de junho de 2018, com especial ênfase para a preamar e a baixa-mar [3].

A diferença máxima entre ambas dá-se na lua nova, onde comparamos o momento em que os dois efeitos do Sol e da Lua se somam ($L+S$) com aqueles aquando da ausência de ambos. Encontramos uma diferença máxima de $L + S = 3,6$ metros no dia 14 de junho. Por outro lado, na lua decrescente, temos a comparação entre o momento

onde só há efeito da Lua (preamar) com o momento onde o único astro a atuar é o Sol (baixa-mar). Encontramos que $L - S = 1,5$ metros, no dia 7/6. Resolvendo o sistema, concluímos que os efeitos da Lua e do Sol na maré são de 2,55 e 1,05 metros respetivamente, ou seja, o efeito da Lua sobre as marés é o 2,4 vezes o efeito do Sol. Consequentemente, sua densidade média deve ser 2,4 vezes a densidade solar.

Em medidas astronómicas completamente independentes, estima-se que a densidade do Sol seja de $1,41 \text{ g/cm}^3$, enquanto a da Lua é de $3,34 \text{ g/cm}^3$. A razão é de 2,37.

Nada mau para uma conta feita à beira-mar, não é?

REFERÊNCIAS

- [1] Narayan Rana and Pramod Joag. *Classical Mechanics*. McGraw Hill India; 25th edition (2013).
- [2] R. H. Good. "Tides and Densities". *Am. J. Phys.* 68 (4), 387 (2000).
- [3] http://webpages.fc.ul.pt/~cmantunes/hidrografia/hidro_mares.html# em 27/9/2018.

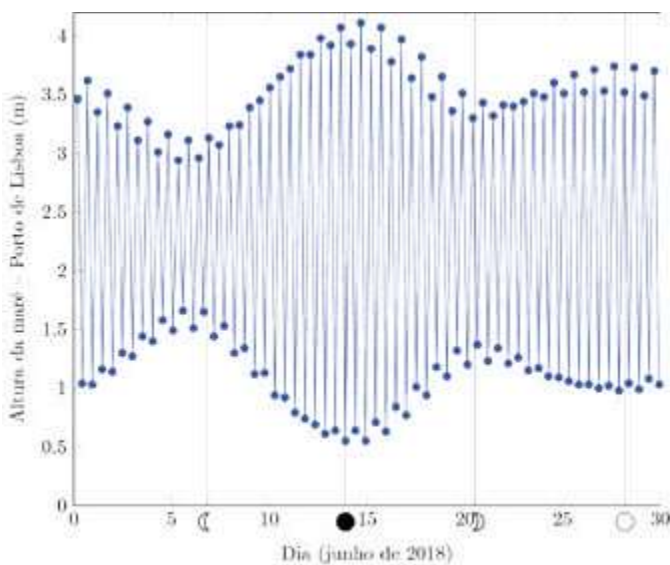


Figura3. Tabela de marés para o porto de Lisboa em junho de 2018. Note a correlação entre as fases da lua, marcadas por ☾, ●, ☽, ○ para as luas decrescente, nova, crescente e cheia, respetivamente. Veja que a cada dia, entre as marés altas, há uma que é um pouco mais alta: esta refere-se a quando estamos virados na direção da Lua. (A força de maré cai com o cubo da distância, e portanto é mais fraca na direção oposta ao astro que a causa). Repare também que na lua nova as marés são mais intensas, pois nestes dias os efeitos do Sol e da Lua somam-se.