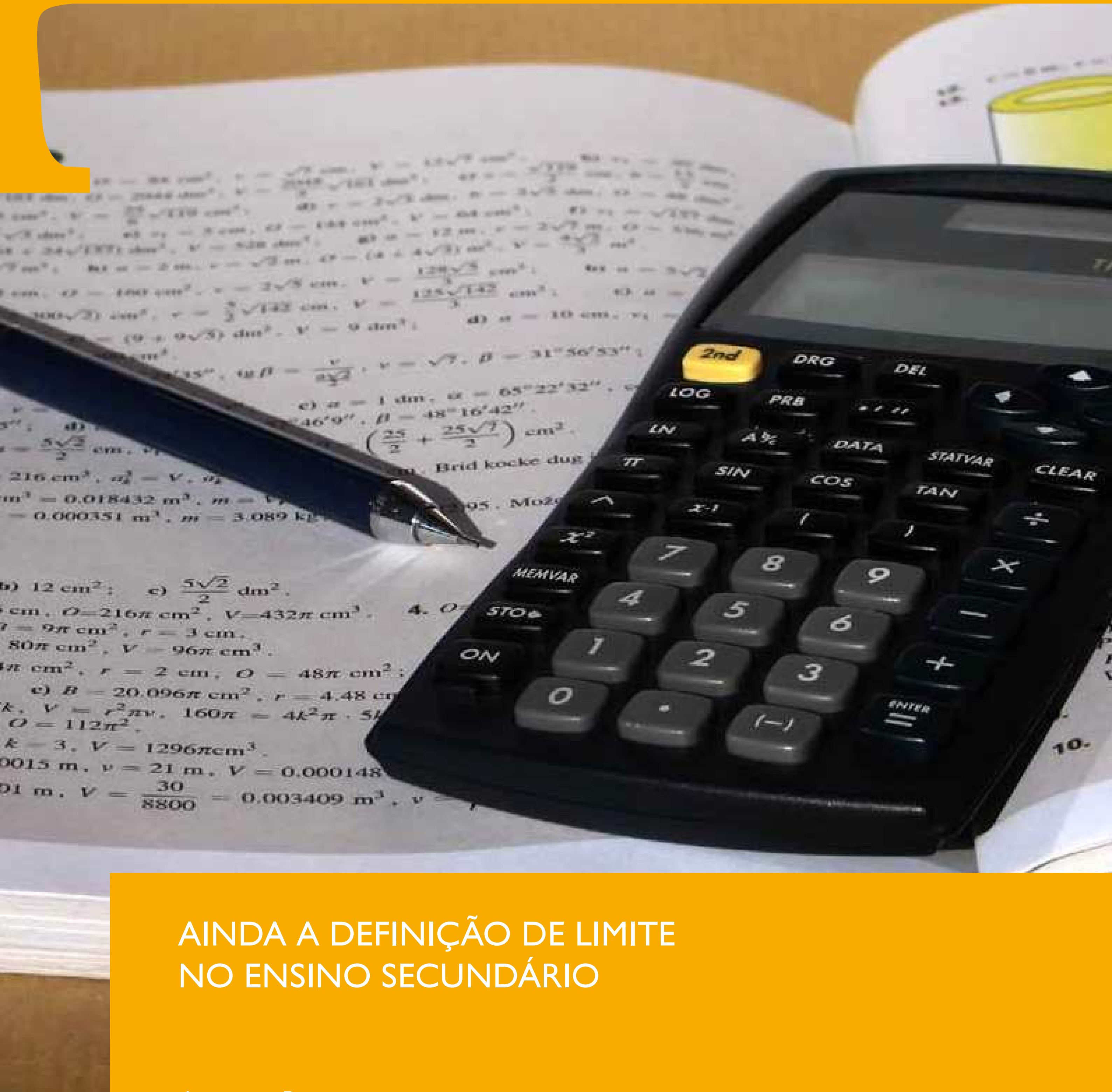

AINDA A DEFINIÇÃO DE LIMITE NO ENSINO SECUNDÁRIO

António Bivar

Professor Associado Aposentado - Faculdade De Ciências Da Universidade De Lisboa

abivar@sapo.pt

A discussão sobre qual a definição de limite que deve ser ensinada aos alunos portugueses do Ensino Secundário continua viva. Em Março de 2018, a *Gazeta de Matemática* publicou um artigo de Augusto Franco de Oliveira sobre o tema. Defendendo uma posição distinta, António Bivar explica agora algumas das razões matemáticas e pedagógicas que sustentam a sua preferência.

1 INTRODUÇÃO

No passado dia 13 de Abril realizou-se em Coimbra, no Departamento de Matemática da FCTUC, por iniciativa da Sociedade Portuguesa de Matemática, um debate relativo a duas definições alternativas de limite de uma função num ponto e à utilização destas definições no Ensino Secundário em Portugal. Este debate surgiu também na sequência de um artigo ([10]) publicado na Gazeta da Matemática, relativo a esta questão, pelo Prof. Augusto Franco de Oliveira; para facilidade do leitor utilizarei a terminologia introduzida nesse artigo para as duas definições que adiante se especificarão, nomeadamente «limite (em ponto) incluído» (com a notação abreviada ou em fórmulas, «limi») e «limite (em ponto) excluído» (com a notação abreviada ou em fórmulas, «lime»). Participei nesse debate enquanto co-autor do novo programa de Matemática A (de 2014), em que se optou pelo *limite incluído* enquanto definição básica de limite, ao contrário do que era usual no Ensino Secundário; assim, nesse contexto, se se pretender também introduzir o conceito de *limite excluído*, para o designar será necessário acrescentar algum qualificativo ao termo «limite».

Naturalmente, e contra a opinião do Prof. Franco de Oliveira, defendi, nesse debate, a opção tomada no programa de que fui co-autor e aceitei agora o desafio que me foi feito pela redacção da Gazeta da Matemática para expor em artigo o meu ponto de vista. Utilizarei livremente, quer um documento da minha autoria destinado a acções de formação e que se encontra on-line no site da Direcção Geral de Educação[1], quer o próprio texto da minha palestra no referido debate em Coimbra.

Apesar desta alteração, no programa de Matemática A de 2014 optou-se por manter as definições "*à Heine*" de limite de função real de variável real num ponto, já habituais no Ensino Secundário, em detrimento das definições "*à Cauchy*", que não são portanto utilizadas. Assim, neste artigo, não se analisarão as eventuais vantagens e desvantagens de cada um destes grupos de definições (em certo sentido equivalentes) para uma primeira abordagem da noção de limite, a nível do Ensino Secundário. Diremos apenas que, tal como desde há muito ocorre no Ensino Secundário, começa por tratar-se em primeiro lugar do conceito de limite de sucessão de números reais, como preliminar para o estudo mais geral do conceito de limite de função real de variável real; passa-se assim de funções reais em que o domínio é sempre o conjunto dos números naturais e o limite é sempre calculado "em mais infinito" para o caso mais geral de funções reais de variável real (portanto não apenas para funções com domínio igual a $\mathbb{N}$, como era o caso das sucessões, mas para domínios arbitrários reais) e em que, em condições adequadas, se alarga aos números reais e a menos infinito os "pontos em que se calcula o limite". Assim, para além da vantagem pedagógica de se iniciar o estudo dos limites com um caso particular mais simples, utiliza-se depois este caso particular como base para o alargamento da noção a outras situações; no que se segue supor-se-á que o leitor conhece a definição e propriedades elementares dos limites de sucessões reais.

2. UMA DEFINIÇÃO GERAL DE LIMITE E O LIMITE "BÁSICO".

Fixando-nos então na formulação de Heine e analisando apenas, para fixar ideias, os limites em pontos da recta real, recordemos que, dada uma função:

$$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

e sendo $a, b \in \mathbb{R}$, para definir o que se entende por b ser,

[1] *cf.* [1].

em algum sentido, *limite de f em a* (dizendo-se, nesse caso que «*b é limite de f(x) quando x tende para a*», abreviadamente $b = \lim_{x \to a} f(x)$, eventualmente com outros qualificativos que explicitam de que tipo de limite se trata), fixamos determinado conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e consideramos sucessões x_n de números reais pertencentes a $A \cap D$ a convergir para a, analisando o que acontece às sucessões $f(x_n)$; se, para qualquer sucessão x_n naquelas condições, a sucessão $f(x_n)$ tender para b, *sendo satisfeitas as condições suplementares que adiante se explicitarão*, diremos que *b é limite de f(x) quando x tende para a*, acrescentando eventualmente um qualificativo ao termo "limite", dependente da escolha do conjunto A.

As distintas noções de limite dependem portanto, essencialmente, dessa escolha, a qual determina, por seu lado, que condições prévias suplementares se devem impor ao número a; estas condições serão as necessárias e suficientes para que, a existir, o limite em a seja único. Não é difícil concluir que basta e é necessário, para esse efeito, que *exista pelo menos uma sucessão x_n de elementos de $A \cap D$ a tender para a*; por outras palavras, que a seja o que habitualmente se designa por *(ponto) aderente* a $A \cap D$. Com efeito, se essa condição não for satisfeita, fixado $b \in \mathbb{R}$, não existindo nenhuma sucessão x_n de elementos de $A \cap D$ a tender para a, em particular não existirá nenhuma para a qual, além disso, $f(x_n)$ não tenda para b; assim, qualquer número real satisfará a condição necessária acima expressa para ser um limite de f em a, com essa escolha de A (já que a negação de tal condição nunca pode ser verdadeira), perdendo-se a unicidade. Reciprocamente, se a for aderente a $A \cap D$ e $b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq c$, considerando uma sucessão x_n de elementos de $A \cap D$ a tender para a (que sabemos existir, por definição de ponto aderente), não podemos ter simultaneamente $f(x_n)$ a convergir para b e para c, atendendo à unicidade do limite de sucessões, pelo que b e c não podem ser ambos limite de $f(x)$ quando x tende para a, para esta escolha do conjunto A, ou seja, valerá a unicidade pretendida.

Atendendo ao exposto, não há dúvidas na comunidade matemática quanto à "legitimidade" de qualquer noção de limite de função que seja caso particular da definição acima exposta, independentemente da designação que se utilize para a identificar. Podemos resumir nos seguintes termos a definição genérica de limite acima analisada:

Dada uma função:

$$f : D \subset \mathbb{R} \to RR,$$

*$a, b \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, diremos que b é o **limite de $f(x)$ quando x tende para a (ou o limite de f em a) por valores em A** se a for aderente a $A \cap D$ e, para qualquer sucessão x_n de elementos de $A \cap D$ tendendo para a, $f(x_n)$ tender para b.*

Também não há qualquer divergência assinalável no seio da comunidade matemática quanto a determinadas designações para certas escolhas particulares do conjunto A. Assim, por exemplo, para $A =]a, +\infty[$, o limite por valores em A designa-se habitualmente por limite «à direita», ou «por valores superiores», para $A =]-\infty, a[$ por limite «à esquerda» ou «por valores inferiores».

Quanto às designações referidas no início deste artigo, «limite (em ponto) incluído» (com a notação, abreviada ou em fórmulas, *limi)* e «limite (em ponto) excluído» (com a notação, abreviada ou em fórmulas, *lime*), correspondem respectivamente a $A = \mathbb{R}$ e $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

A divergência que subsiste na comunidade matemática, com exemplos que se podem encontrar em obras de diferentes níveis de complexidade e de qualidade, desde que seja referida uma noção de limite de função, consiste apenas na escolha "entre *limi* e *lime*" para *noção básica de limite*, ou seja, limite a referir sem qualquer qualificativo, ficando-se assim obrigado a utilizar algum qualificativo para a outra noção, caso se pretenda utilizá-la. Quando a escolha recai sobre o *limi*, muitas vezes designa-se o lime por «limite por valores diferentes» (que em francês se designa por vezes por «limite épointée»), já que neste caso $A \cap D$ é exactamente o conjunto dos elementos do domínio de f distintos de a; quando recai sobre o *lime* não é usual utilizar-se a noção de *limi* (que aliás não é definível de modo simples com base na de *lime*), pelo que não há uma designação minimamente consagrada para o efeito. Consoante a escolha feita, outras designações óbvias poderão corresponder a determinações diferentes de A; assim, por exemplo, se for *limi* o limite "básico" escolhido, o «limite por valores racionais» corresponderá naturalmente a $A = \mathbb{Q}$, ao passo que corresponderá a $A = \mathbb{Q} \setminus \{a\}$ se essa escolha recair sobre o *lime*.

Não nos alongaremos sobre as razões históricas ou psicológicas que podem explicar esta divergência. Trata-se de situação semelhante a muitas outras em Matemática, pois não foi ainda possível, nem provavelmente alguma vez o será (ou sequer será desejável), uniformizar totalmente as definições, mesmo as de conceitos tão usuais como o de «conjunto dos números naturais» (contém ou não o 0?) ou «rectas paralelas» (uma recta é ou não paralela a si própria?). Desde que, evidentemente, em cada obra matemática se esclareça adequadamente o significado dos termos utilizados e se procure conformar as escolhas feitas, tanto quanto possível, a consensos estabelecidos na comunidade matemática, estas "divergências" não ferem a qualidade da comunicação com os utilizadores dessas obras.

A questão que subsiste será apenas a maior conveniência de uma ou outra opção para o fim a que se destina a obra em que é adoptada, ou, mais genericamente, qual das opções permite um desenvolvimento mais "simples" ou "esteticamente mais apelativo" da teoria dos limites de funções reais de variável real. Estas expressões entre aspas deixam suspeitar que haverá sempre algum grau de subjectividade nestas apreciações, mas procurarei descrever quais os argumentos que me parecem favorecer a opção pelo *limite incluído*, que é a do actual programa de Matemática A, em particular também por se tratar de uma primeira abordagem deste conceito e para o nível de escolaridade a que se destina, mesmo contrariando uma tradição há muito estabelecida no nosso Ensino Secundário.

Antes de abordarmos questões mais técnicas e outras de carácter pedagógico, também convém analisar alegações que por vezes se fazem quanto ao carácter mais intuitivo do *limite excluído* relativamente ao *limite incluído*, enquanto conceito básico de limite. Um argumento habitual a este respeito segue linhas equivalentes ou pelo menos muito próximas das seguintes: na linguagem comum, a noção de "aproximação", que de alguma maneira se pretende formalizar matematicamente com a noção de limite (no contexto das funções reais de variável real), pressupõe que "quem, ou aquilo que, se está a aproximar" não chega a atingir "aquilo de que se aproxima"; ninguém diz que "se está a aproximar" de um sítio se já lá tiver chegado... Assim, considera-se que a tradução matemática da expressão "quando x tende para a" (que pretende significar mais propriamente qualquer coisa como "quando x se aproxima indefinidamente de a") quando é feita através de sucessões convergindo para a, não deve admitir sucessões que tomem o valor a. No entanto ninguém contesta que $f(x_n)$ possa tomar o valor b, quanto às correspondentes sucessões $f(x_n)$ cuja convergência para b traduz matematicamente a expressão "$f(x)$ tende para b"... Esta "assimetria", inerente ao *limite excluído*, entre a interpretação matemática do conceito de "aproximação indefinida" no caso das variáveis independente e dependente de uma função real de variável real, explica de certa maneira as dificuldades, adiante analisadas, com que nos deparamos ao pretendermos enunciar um teorema do *lime* da função composta que seja simultaneamente tão geral quanto possível, com um enunciado suficientemente simples para ter alguma utilidade, e com uma demonstração abordável no Secundário, ao passo que com o *limi* é uma trivialidade enunciar (e demonstrar) um teorema com essas características. Com efeito, a própria noção de composição conduz a que a variável dependente de uma função passe a funcionar como variável independente da que com ela se compõe...

Para se apreciar o quanto nos afastamos dessa suposta visão intuitiva da "aproximação" com qualquer das noções de limite, basta pensarmos na interpretação de uma função real de variável real como trajectória de um ponto num eixo, em que a variável independente representa o tempo e a dependente a abcissa do ponto no eixo em questão; uma função constantemente igual a $b \in \mathbb{R}$ em determinado intervalo não degenerado representará "o repouso" no ponto de abcissa b do eixo, ao longo do intervalo de tempo considerado. É óbvio que, com qualquer das duas noções de limite, incluído ou excluído, é igual a b o limite dessa função em qualquer ponto ("instante") t_0 do intervalo-domínio, mas dificilmente alguém diria, em linguagem comum, que um objecto cujo movimento seja representado por essa função "se está a aproximar" do ponto de abcissa b do eixo quando t tende para t_0, já que o objecto está parado nesse ponto durante todo o intervalo de tempo... Assim, a tentativa de adequar a noção de limite de função a este aspecto particular da linguagem comum através do recurso ao *lime* é, de certa maneira, ilusória.

3. CONFRONTO DO *LIME* COM O *LIMI*.

Abordemos agora alguns aspectos mais técnicos que distinguem o *lime* do *limi* quanto ao modo como se pode desenvolver, a nível do Ensino Secundário, uma iniciação ao estudo da Análise Matemática e quanto às ferramentas que os alunos podem adquirir a esse nível, também para a prossecução dos estudos. Como é óbvio, a escolha de uma noção para "*limite básico*" tem como consequência que, sempre que possível, se privilegie essa noção no enunciado dos diversos resultados inerentes a essa iniciação; tratando-se de noções matematicamente distintas, é de prever que os resultados devam ser distintos, podendo resultados análogos ser mais ou menos complexos, quer quanto ao enunciado quer quanto à demonstração, e/ou mais ou menos úteis, consoante a escolha feita. A apreciação global destes efeitos deverá pesar na escolha a fazer, nomeadamente quando se desenha um curriculum.

Uma primeira observação resulta facilmente da maneira como se apresentou acima uma definição geral de limite *por valores num conjunto A* ou «segundo um conjunto A»; é claro que o caso $A = \mathbb{R}$ (correspondente ao *limite incluído*), ou seja, "o mais extenso possível", será o que menos parece justificar um qualificativo, já que não há qualquer restrição ao domínio de f para efeito de escolha das sucessões "a tender para a"; todas as outras escolhas de A são suceptíveis de restringir o conjunto em que se tomam essas sucessões, pelo que parecem merecer algum qualificativo que explicite essa restrição. Do mesmo modo, no caso do *limi*, a restrição suplementar a impor ao ponto a é simplesmente que seja *aderente ao domínio D de f*, ao passo que com qualquer outra escolha de A teremos de considerar o conceito de "ponto aderente a $A \cap D$", o que no caso do *lime*, em que $A = \mathbb{R}\backslash\{a\}$, justifica a introdução de uma nova designação para tais pontos, nomeadamente «*pontos de acumulação do domínio de f*», conceito portanto, neste sentido, mais complexo do que o de *ponto aderente*.

O que precede justifica que se possa considerar o conceito de *limi* mais simples do que o conceito de *lime*, podendo este último e todos os outros conceitos de *limite por valores* em A que correspondam a subconjuntos estritos A de $\mathbb{R}$, ser considerados muito simplesmente "*limis*" (ou seja "limites", sem mais, se for *limi* o limite básico considerado) de restrições de f aos correspondentes conjuntos $A \cap D$ (ou simplesmente A, com uma adequada definição geral de restrição de função a conjunto não necessariamente contido no domínio).

É de notar também que esta abordagem (escolha do *limi*, *limite incluído*, como limite básico) está bastante vulgarizada em diversos âmbitos em que se introduz ou em que se desenvolve uma introdução à Análise Matemática; ou seja, a unanimidade que se verificou a nível do Ensino Secundário em Portugal durante muito tempo quanto à definição alternativa à actualmente em vigor, sempre esteve muito longe de existir a nível do ensino universitário[2]. Assim, sendo o *limite excluído* (*lime*) um caso particular, no sentido acima referido, do *limite incluído* (*limi*), a eventual adaptação a uma alteração na definição de limite é simples quando se faz passando desta última versão para a anterior, sendo fácil utilizar para o *lime* todos os teoremas enunciados para o *limi* (bastará considerar as restrições das funções a $D\backslash\{a\}$). Como é óbvio, o mesmo não se pode dizer de uma eventual adaptação ao *limi* da teoria desenvolvida com base no *lime*, já que não existe nenhuma maneira óbvia de encarar o primeiro como caso particular do segundo.

Em segundo lugar, embora qualquer das definições obrigue a *cuidados* por vezes com alguma subtileza para que se evitem *erros* no enunciado de determinadas propriedades, o *limite excluído* obriga a *cuidados suplementares*, infelizmente muitas vezes escamoteados mesmo em obras de referência.

Vejamos alguns exemplos numa excelente obra de co-autoria de Sebastião e Silva.

Começaremos com um exemplo que só por si não permite ainda distinguir as duas definições quanto à simplicidade de uma abordagem correcta, mas serve de alerta quanto aos cuidados a ter com estes assuntos.

Utilizaremos o Compêndio de Álgebra de Sebastião e Silva e Silva Paulo, 1º Tomo, 6º ano, edição de 1968 ([12]).

Introduz-se o *limite excluído* como conceito básico de limite (*cf. op. cit.* p. 188), com toda a generalidade quanto ao domínio das funções e com o cuidado, na definição de limite, de exigir que o ponto a em que este se calcula seja ponto de acumulação do domínio da função, embora não se utilize essa terminologia. Essa exigência aparece numa nota de rodapé (*cf. op. cit., loc. cit.*):

> *Subentende-se nesta definição que os valores atribuídos a x pertencem ao domínio da função e que existe pelo menos uma sucessão de pontos deste domínio, diferentes de a, tendente para a.*

É esta exigência que permite depois garantir a *unicidade do limite*, tal como é enunciada na página seguinte. No entanto, com as definições gerais adoptadas de operações com funções reais de variável real (*cf. op. cit.*, p. 118), em que se definem estas operações nos casos mais gerais possíveis e, como é habitual, com os domínios também mais extensos possíveis, *não é possível* agora, com toda a generalidade, garantir, como se faz logo em seguida (*cf. op. cit.*, p. 189), que:

> *Se duas funções f(x) e g(x) tendem para limites finitos quando x tende para um limite a (finito ou infinito) também a soma, a diferença e o produto dessas funções tendem para limites finitos quando $x \to a$ (…)*

Com efeito, o domínio de $f+g$, por exemplo, pode reduzir-se ao ponto a; ou, mais geralmente, *a pode não ser ponto de acumulação do domínio de $f+g$, ainda que o seja de cada um dos domínios de f e g.* Nesse caso, com as definições dadas, podem existir os limites (em particular finitos) de f e g quando $x \to a$ mas *não pode existir o limite de $f+g$ quando $x \to a$…*

Se na definição de limite se omitisse aquela exigência, então *perder-se-ia a unicidade*; em qualquer caso *não poderíamos simultaneamente demonstrar todas as propriedades dos limites expressas na mesma página, do modo como estão enunciadas.*

Por exemplo, sendo $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \sqrt{2-x}$ sabemos que ambas as funções têm limite 0 quando $x \to 2$, mas $f+g$ tem domínio reduzido ao ponto 2, pelo que, com a definição dada, *não existe o limite (lime) de* $f(x)+g(x)$ *quando* $x \to 2$…

Se na definição de limite eliminássemos a exigência expressa na referida nota de rodapé, então $\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$ *tenderia para qualquer valor* quando $x \to 2$, como atrás se viu. Que nesta obra se admite a utilização de somas de funções deste tipo fica expresso num exemplo que se apresenta em nota de rodapé, na página em que se introduzem as operações algébricas sobre funções (*cf. op. cit.* p. 118): $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}$, chamando-se a atenção, com este exemplo, para a possibilidade de ser até vazio o domínio da soma.

Note-se que os enunciados anteriormente referidos ficariam adequadamente corrigidos acrescentando-se a hipótese de que o ponto em que se calcula o limite também é de acumulação dos domínios das funções resultantes das operações executadas sobre as funções dadas. Analogamente, com o *limite incluído* enquanto definição básica de limite, é necessário pressupor uma condição idêntica, substituindo "ponto de acumulação" por "ponto aderente".

Assim, neste caso, a "vantagem" do *limite incluído* estará apenas em que a condição a impor à partida aos pontos em que se pode "permutar passagem ao limite com operação algébrica" é menos restritiva, já que *todo o ponto de acumulação é aderente*, não sendo a recíproca verdadeira ("é mais fácil ser ponto aderente do que de acumulação").

No exemplo dado, com $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \sqrt{2-x}$, como 2 é aderente ao domínio da soma das duas funções, embora não seja ponto de acumulação desse domínio, podemos concluir que existe *limi* da soma nesse ponto, embora não exista *lime*.

É claro que alterando adequadamente as funções, pondo, por exemplo,

$$f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x-2}}, g(x) = \frac{4-x^2}{\sqrt{2-x}},$$

já 2 *não é aderente* ao domínio da soma das duas funções (que, neste caso, é vazio…), pelo que *não existe limite* dessa soma em 2, embora exista o limite nesse ponto de cada uma delas. Assim, mesmo com o *limite incluído, não se pode dispensar uma condição suplementar* para que os referidos enunciados correspondam a teoremas.

Outro tipo de incorrecções que se podem encontrar, agora claramente mais facilmente evitáveis com o *limite incluído*, está associado à definição habitualmente dada de *continuidade* (*cf. op. cit.*, p. 204):

Diz-se que uma função f(x) é contínua num ponto a, quando se verificam as duas seguintes condições:

(1) o ponto a pertence ao domínio da função f(x).

(2) f(x) tende para f(a) quando x tende para a, isto é:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Com esta definição e sendo o "excluído" (*lime*) o limite adoptado no enunciado, uma função não seria contínua num ponto isolado do domínio…

Portanto, por exemplo, $\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$ não seria contínua em 2, único ponto do respectivo domínio, o que é um contra-exemplo para (*cf. op. cit.*, p. 209):

A soma, a diferença e o produto de duas funções contínuas num dado ponto ainda são funções contínuas nesse ponto.

O programa anterior (de 2002) de Matemática A, embora também prescrevesse a definição de limite segundo Heine, *não explicitava qual das versões deveria ser adoptada* e, uma vez que já tinha acabado o regime de livro único e ainda não tinham sido adoptadas as metas curriculares agora em vigor, foram os autores de manuais que optaram unanimemente por manter a definição de Heine com a formulação "por valores diferentes" (*limite excluído*), enquanto esse programa vigorou.

No entanto, não havendo também prescrições explícitas do anterior programa quanto a diversos aspectos do tratamento a dar a estas questões, as soluções encontradas foram *variadas e nem todas correctas*. Em particular, por um lado impunham-se, em alguns manuais, *restrições aos domínios* (por exemplo para se definir a noção de continuidade) que não existiam enquanto vigorou o regime de livro único (por vezes para contornar as dificuldades acima apontadas) e, por outro, nem sempre houve o cuidado de, nos enunciados das propriedades algébricas dos limites ou das funções contínuas, se imporem condições

[2] Para a opção pelo *limite incluído*, *cf.*, por exemplo, os manuais [6], [3] e [4], utilizados ao longo de décadas respectivamente na FCUL e no IST.

adequadas para a validade das conclusões a tirar[3]. Parece assim que havia aqui uma "máquina a necessitar de reparação" e uma análise a fazer do que teria contribuído para a danificar...

A definição de limite adoptada no Programa de 2014 permite que a *definição e propriedades da noção de continuidade* sejam enunciadas como acima ficou ilustrado (até de maneira mais simples e equivalente…) sem necessidade de ressalvas relativas aos domínios das funções ou aos pontos em que se define a continuidade. Já com o *limite excluído*, para que funcione o *Teorema da continuidade da soma, produto, etc. de funções contínuas* com o mesmo grau de generalidade, será necessário acrescentar à definição de continuidade algo equivalente a: "*além disso qualquer função real de variável real se considera contínua nos pontos isolados do domínio*".

Como vimos, com o *limite incluído*, para que tenha lugar a *unicidade do limite*, há que restringir também os pontos onde se calculam limites, agora aos chamados *pontos aderentes*.

No Programa e Metas Curriculares de Matemática A de 2014 ([8], de agora em diante designados apenas por «metas») ficou então, aqui com alguns negritos acrescentados (FRVR11):

1. Definir limite de uma função num ponto e estudar as respetivas propriedades fundamentais.

1. Identificar, dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, a como «ponto aderente a A» quando existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$.

2. Identificar, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como «limite de $f(x)$ quando x tende para a» **quando a for aderente ao domínio D_f de f** e para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a, $(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por «$\lim_{x \to a} f(x)$», referir, nesta situação, que «*f(x)* tende para b quando x tende para a» e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos.

Com alguns cuidados nas propriedades algébricas dos limites:

FRVR11-1:

9. Justificar que os limites da soma, do produto e do quociente de funções $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ e do produto por um escalar α e da potência de expoente racional r de uma função $f : D_f \to R$, se calculam, **em pontos aderentes aos domínios** respetivamente de $f+g, fg$, f/g, αf e f^r a partir dos limites de f e g nesse pontos de forma análoga ao caso das sucessões, reconhecendo que se mantêm as situações indeterminadas.

Já quanto à continuidade, tudo fica mais simples (FRVR11-2) :

1. Justificar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio que se o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe então é igual a $f(a)$.

2. Designar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, a função f por «contínua em a» quando o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

5. Justificar que se as funções reais de variável real $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ são contínuas num ponto a, então as funções $f+g$, $f-g$ e $f \times g$ são contínuas em a e, se $g(a) \neq 0$, a função f/g é contínua em a.

Também a definição dos *limites laterais* pode aproveitar a definição geral dada de limite e de restrição de uma função (exemplifica-se com a definição de limite à direita - FRVR11-1):

4. Identificar, dada uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como o «limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores superiores a a» quando $b = \lim_{x \to a} f|_{]a,+\infty[}(x)$, representar b por $\lim_{x \to a^+} f(x)$, designá-lo também por «limite de $f(x)$ à direita de a», referir, nesta situação, que «$f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores superiores a a» e estender esta definição ao caso de limites infinitos.

Veremos adiante qual a utilização que os limites laterais têm no desenvolvimento da introdução à Análise no Ensino Secundário.

4. ALGUMAS DIFICULDADES INEVITÁVEIS E UM TEOREMA "FERIDO DE MORTE E RESSUSCITADO".

Limite da composta:

Como acabámos de ver, mesmo com o *limite incluído* há que ter alguns cuidados com os *domínios das funções* quando se pretende enunciar resultados relativos a limites de funções definidas pela aplicação de operações algébricas ou composição a funções dadas.

Esses cuidados já foram referidos e exemplificados a propósito dos resultados gerais acerca do *limite da soma,* *produto e quociente*. O mesmo ocorre com o limite de uma função composta. Formalmente gostaríamos de poder "permutar a passagem ao limite com a composição" no sentido seguinte:

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to \lim_{x\to a} f(x)} g(y).$$

e, de facto, com o *limite incluído* é possível fazê-lo, nas condições mais gerais possíveis em que os limites expressos no segundo membro façam sentido, sendo suficiente para o efeito acrescentar a hipótese de que a é também aderente ao domínio da função composta, condição que é aliás também necessária para a existência do limite no primeiro membro. Este resultado ocorre nas metas com o seguinte enunciado (FRVR11-1):

> 11. Justificar, dadas funções reais de variável real f e g e um ponto a **aderente a** D_{gof}, que se $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to b} g(x) = c \in \mathbb{R}$ então $\lim_{x\to a}(gof)(x) = c$.

O problema, mais uma vez, é que não fica garantido à partida que o ponto a em que se pretende calcular o limite continue a ser *aderente* ao domínio da nova função construída a partir das funções dadas. Considere-se, por exemplo, $f(x) = -x^2$, $g(x) = x \ln x$ e $a = b = c = 0$; temos $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $lim_{x\to 0} g(x) = 0$ (em particular 0 é aderente aos domínios de f e g), mas o domínio de $g \circ f$ é vazio, não tendo portanto pontos aderentes, pelo que, em particular, não existe $\lim_{x\to 0}(gof)(x)$.

Pelo contrário, quando se trata de analisar a *continuidade* tais cuidados são agora desnecessários, pois, nesse caso, a é sempre *elemento do domínio* tanto das funções dadas como da nova função, nos casos considerados, sendo portanto forçosamente *aderente* ao respectivo domínio. Note-se que o ponto a em que se estuda a continuidade o que não tem de ser é *ponto de acumulação* dos domínios das funções dadas e, mesmo que o seja, daí não resulta que tenha de ser *ponto de acumulação* do *domínio da nova função* construída a partir delas. Daí as dificuldades até agora detectadas relativas ao tratamento da continuidade com a definição baseada no *limite excluído* e que se esfumam com o *limite incluído*.

O *teorema do limite da função composta* acima reproduzido (FRVR11-1.11) é outro dos temas em que o "comportamento" do *limite excluído* levanta dificuldades talvez, à primeira vista, inesperadas.

Na verdade, com o *limite excluído* não é mesmo possível enunciar um teorema relativo ao limite de uma função composta simultaneamente tão abrangente como o acima recordado e com um grau de simplicidade suficiente para que seja verdadeiramente útil. Em particular, o resultado, tal qual está enunciado, fica *falso* para o *limite excluído*, mesmo substituindo nas hipóteses «ponto aderente» por «ponto de acumulação» e, o que é talvez mais inesperado, mesmo para funções ambas com domínio igual a $\mathbb{R}$ e mesmo no caso em que existem tanto os limites (excluídos) $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{y\to b} g(y) = c$, nos termos da hipótese do teorema do limite da função composta, como o limite (excluído) $\lim_{x\to a} g \circ f(x)$, como nos termos da tese do referido teorema; o que acontece é que *este último limite pode não ser igual a c...*

Basta considerar o seguinte exemplo (também referido no artigo do Prof. Franco de Oliveira atrás citado [10]):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \; g = f.$$

Como é óbvio, existe $\mathrm{lime}_{x\to 0} f(x) = 0$ e portanto também $\mathrm{lime}_{x\to 0} g(x) = 0$. No entanto, como também é óbvio,

$$g \circ f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

pelo que

$$\mathrm{lime}_{x\to 0} g \circ f(x) = 1 \neq 0!$$

Uma vez que o "limite por valores diferentes" (*excluído*) é simplesmente um *limite incluído* de uma restrição da função dada, cabe perguntar como analisar o exemplo anterior a esta luz e tendo em mente o teorema do limite (*limi*) da função composta; notemos que a restrição f_1 a $\mathbb{R}\backslash 0$ de f é muito simplesmente, neste caso, a função constante

[3] *cf.* por exemplo, [9], [5], [2] e [11]; apenas no primeiro manual se dá uma definição simultaneamente geral e correcta de limite (lime, em todos os casos) e se enunciam correctamente os teoremas relativos a operações algébricas com limites. No segundo, estando bem formulada a definição, já os enunciados dos referidos teoremas estão, em bom rigor, incompletos e no terceiro, para além dos correspondentes teoremas, a própria definição não é abordada de modo inteiramente correcto. No quarto manual impõem-se restrições suplementares aos domínios das funções para as quais se define a noção de limite; em alguns dos teoremas, para que fiquem correctos, tem de presumir-se que essas restrições também se aplicam às funções resultado das operações algébricas consideradas. Quanto à continuidade, apenas o terceiro manual não impõe condições suplementares ao ponto em que se define continuidade, mas a definição fica incorrecta, e apenas o primeiro e o quarto enunciam as propriedades algébricas da continuidade de forma coerente com a definição adoptada (com uma pequena ressalva para o primeiro), mas com restrições relativas aos domínios das funções consideradas. Em todos os manuais são escassas ou inexistentes as indicações relativas a demonstrações dos referidos resultados; em nenhum deles se aborda o limite da função composta, resultado tradicionalmente utilizado no Secundário, por vezes sob a forma de "cálculo de limites por mudança de variável".

igual a 0 nesse domínio, portanto com limite 0 em 0, que é aderente ao domínio, o mesmo se passando portanto com $g_1 = f_1$. No entanto, como também é óbvio, o domínio de $g_1 \circ f_1$ é vazio! Assim, nada podemos concluir do teorema quanto à existência de limite da composta em 0, já que 0 não é aderente ao domínio de $g_1 \circ f_1$.

A inexistência de um teorema para o *limite excluído* de uma função composta com hipóteses razoavelmente simples e suficientemente geral torna difícil de justificar determinadas passagens ao limite, numa formulação baseada no *lime*, que são trivialmente justificáveis com o referido teorema, para uma abordagem baseada no *limi*. Consideremos, por exemplo, o limite:

$$\lim_{x\to 0} e^{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}.$$

É fácil concluir que $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$ (basta notar que $|x \operatorname{sen} \frac{1}{x}| \le |x|$, para $x \neq 0$); admitindo a continuidade da exponencial, teremos então $\lim_{y\to 0} e^y = e^0 = 1$, pelo que, pelo teorema do limite (*limi*) da composta, concluímos imediatamente que $\lim_{x\to 0} e^{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}} = 1$.

Podemos também substituir a exponencial por uma função qualquer com limite em 0, desde que, evidentemente, 0 continue a ser aderente ao domínio da composta; por exemplo, admitindo o limite notável $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e notando que há sucessões x_n a tender para 0 tais que $x_n \operatorname{sen} \frac{1}{x_n}$ nunca se anula (por exemplo, $x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$), o que garante que 0 é aderente ao domínio da composta abaixo utilizada, podemos imediatamente concluir que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)}{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}} = 1.$$

Já com o *limite excluído* como limite básico, por um lado, como veremos, não se disporia de um teorema de limite da composta que abrangesse *de modo simples* todos estes casos; por outro, se pretendêssemos usar apenas a definição de continuidade para obter o limite em zero da primeira daquelas "funções compostas" ficaríamos atrapalhados, pois tentando usar a definição de Heine de limite e a definição de função contínua baseada no *limite excluído*, teríamos de tomar uma sucessão arbitrária a tender para zero por valores diferentes, digamos x_n, e depois verificar o que acontece com a sucessão das imagens. Embora soubéssemos que $x_n \operatorname{sen} \frac{1}{x_n}$ tende para 0, como pode não ser por valores sempre diferentes de 0 (basta tomar, por exemplo $x_n = 2/n\pi$), não saberíamos logo o que acontece, por exemplo, a $e^{x_n \operatorname{sen} \frac{1}{x_n}}$, pois pela definição de continuidade de e^x em 0 que tem por base o *limite excluído* apenas sabemos o que se passa para o limite em 0 de e^{y_n} se y_n tender para 0 por valores diferentes. É claro que no ensino superior a conclusão seria, em geral, fácil de obter, porque se estaria habituado a trabalhar com propriedades de limites de sucessões envolvendo subsucessões, ou com a definição de Cauchy de continuidade, mas qualquer dessas abordagens obrigaria a trazer esses temas para o Ensino Secundário…

Podem encontrar-se alguns enunciados de resultados relativos a funções compostas com a definição de limite "por valores diferentes" (ou seja, adoptando o *limite excluído* como definição básica de limite). Num excelente manual de Elon Lages Lima ([7]) encontra-se a seguinte versão do Teorema do limite da função composta, no caso do *limite excluído* (em que se utiliza a notação X' para o conjunto dos pontos de acumulação de um conjunto X):

Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$, *com* $f(X) \subset Y$. *Sejam* $a \in X'$ *e* $b \in Y' \cap Y$, *se* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *e* $\lim_{y\to b} g(y) = c$ *tem-se* $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$, *desde que seja* $c = g(b)$.

O enunciado é manifestamente mais complicado do que o atrás recordado para o *limite incluído*. É, no entanto, mais restritivo; com efeito impõem-se condições suplementares aos domínios de f e g (o que evita ter de se acrescentar que o ponto a seja de acumulação do domínio da composta, já que este domínio, neste caso, coincide com X) e impõe-se além disso que $c = g(b)$, ou seja, que a função g esteja definida e seja contínua em b. Além disso, a respectiva demonstração, com a definição à Heine, suscitaria as dificuldades apontadas atrás, relativas ao uso de subsucessões, o que na prática a tornaria dificilmente acessível ao Ensino Secundário, quando no caso do *limite incluído* a demonstração do teorema da composta é uma simples justificação de carácter imediato, para um aluno do Secundário que siga esta abordagem dos limites. Além disso, este teorema do livro de Elon Lages Lima, mais complicado tanto no enunciado como na demonstração, nem sequer se aplica imediatamente ao segundo exemplo atrás apresentado de cálculo de limite de uma composta, em que, logo à partida, não estava satisfeita a condição relativa aos domínios, nem sequer a função g estava definida em b.

No artigo atrás referido do Prof. Franco de Oliveira apresenta-se uma versão mais geral do teorema do *lime* da composta em que não se colocam restrições aos domínios das funções e consequentemente se acrescenta a condição (que é obviamente *necessária*) de que a seja de acumulação do domínio da composta; para além da condição suficiente apresentada por Elon Lages Lima enuncia-se uma condição suficiente alternativa para a conclusão desejada quanto ao *lime* da composta, que é a seguinte (adaptando as notações às usadas por Elon Lages Lima):

$$f(x) \neq b \text{ para todo o } x \text{ numa vizinhança de } a.$$

Infelizmente, mais uma vez, este teorema mais abrangente (mas de enunciado ainda mais complexo e de demonstração igualmente dificilmente acessível ao Secundário) também não se aplica directamente ao referido segundo exemplo atrás apresentado de cálculo de um limite de composta, pois, nesse caso, em qualquer vizinhança de 0 existe uma infinidade de pontos em que $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ se anula, ou seja, em que "$f(x) = b$".

Note-se que, com o *limite incluído*, o teorema do limite da composta atrás apresentado revela que se existirem os limites das funções componentes (em condições de se poder formalmente "passar ao limite dentro da composição", no sentido atrás explicitado) uma condição necessária e suficiente para que exista limite da composta e seja igual ao que se espera, é muito simplesmente que o ponto em que se calcula o limite seja aderente ao domínio da composta; todos os casos "que façam sentido" de cálculo do limite da composta ficam assim abrangidos por este enunciado extremamente simples e de demostração imediata, bastando em cada caso verificar que o ponto em que se calcula o limite é aderente ao domínio da composta.

Os teoremas acima apresentados relativos ao *limite excluído* da composta, apesar da complexidade acrescida, não se aplicam a todas as situações em que existem os *limites incluídos* das funções componentes, nas condições acima expostas, mesmo que, em particular, sejam também *limites excluídos* (o que acontece sempre que os pontos em que se calculam os limites são de acumulação dos domínios das respectivas funções) e que o ponto em que se calcula o limite seja de acumulação do domínio da composta, ou seja, a situações em que o próprio *limite excluído* da composta pode ser calculado usando o Teorema relativo ao *limite incluído*.

Note-se que, quer a condição de continuidade de g do teorema acima referido, constante do livro de Elon Lages Lima ([7]), quer as condições do resultado exposto no artigo do Prof. Franco de Oliveira ([10]), não são necessárias, mas apenas suficientes para a existência e valor esperado do limite da composta, embora estas últimas no universo mais alargado possível de pares de funções componentes e de valores admitidos para os limites. O segundo exemplo atrás apresentado mostra que é possível existirem os limites (tanto excluídos como incluídos) quer das funções componentes quer da função composta e este último ter o valor esperado e não se verificar nenhuma das condições suficientes do teorema exposto em [10].

É possível colmatar esse "defeito" introduzindo uma terceira condição alternativa e enunciando então o seguinte teorema de função composta para o *limite excluído*:

Teorema. *Dadas funções reais de variável real f e g e sendo a ponto de acumulação de D_{gof}, se existirem os limites excluídos* $\lim e_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ *e* $\lim e_{x \to b} g(x) = c \in \mathbb{R}$ *então é condição necessária e suficiente para que exista e seja igual a c o limite excluído $\lim e_{x \to a}(gof)(x)$, que se verifique uma das duas seguintes condições:*

1) $b \notin D_g$;

2) $b \in D_g$ e, ou g é contínua em b, ou existe uma vizinhança V de a tal que, em $(V \backslash \{a\}) \cap D_{gof}$, f não toma o valor b.

Demonstração: Seja x_n uma sucessão de elementos de D_{gof} a tender para a e com x_n sempre distinto de a; se $b \notin D_g$, necessariamente (por definição de D_{gof}) $f(x_n)$ é sempre distinto de b e, atendendo aos limites que por hipótese têm lugar, esta sucessão tende para b e consequentemente $g(f(x_n))$ converge para c. Supondo agora que $b \in D_g$ e g é contínua em b ou que *existe uma vizinhança de a tal que, em $(V \backslash \{a\}) \cap D_{gof}$, f não toma o valor b*, por um lado, do mesmo modo $f(x_n)$ tende para b, e, por outro, só poderá existir uma subsucessão x_{nk} de x_n para a qual se tenha sempre $f(x_{nk}) = b$ se g for contínua em b; se não existir tal subsucessão concluímos imediatamente da hipótese relativa ao limite excluído de g que $g(f(x_n))$ converge para c. Caso tal subsucessão exista, a mesma conclusão se pode tirar, pois, por um lado, g é, nesse caso, contínua em b, e portanto, por definição de continuidade, $g(b) = c$; por outro lado, considerando duas subsucessões de x_n indiciadas em conjuntos formando uma partição de $\mathbb{N}$, uma delas, x_{nk}, constituída exactamente pelos termos de x_n para os quais $f(x_n) = b$, concluímos que $g(f(x_{nk}))$ converge para c, já que é constantemente igual a este valor, e para a outra subsucessão a mesma conclusão resulta da hipótese relativa ao limite excluído de g. Mais uma vez portanto concluímos que $g(f(x_n))$ converge para c; fica assim demonstrada a condição suficiente.

Reciprocamente, supondo que existe e é igual a c o *limite excluído* $\lim e_{x \to a}(gof)(x)$, que $b \in D_g$ e que *não existe uma vizinhança V de a tal que, em $(V \backslash \{a\}) \cap D_{gof}$, f não toma o valor b*, ou seja, que *em qualquer vizinhança V de a existe* *pelo menos um ponto distinto de a em D_{gof} no qual f toma o valor b*, podemos construir uma sucessão x_n de pontos de D_{gof} distintos de a a convergir para a tal que se tem sempre $f(x_n) = b$; então, por um lado, pela hipótese acerca do limite de *gof*, concluímos que $gof(x_n)$ tende para c e por outro tem-se sempre $gof(x_n) = g(b)$, pelo que, necessariamente, $c = g(b)$ e portanto, por definição, g é contínua em b, já que, por hipótese, c é o *limite excluído* de g em b. A condição é, assim, também necessária. □

Este Teorema do *lime* da composta, apresentando uma condição necessária e suficiente, obviamente que já se pode aplicar ao exemplo já diversas vezes referido do limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)}{x\ sin \frac{1}{x}}.$$

No entanto este novo teorema para além de ainda mais complexo (já que acrescenta uma terceira condição suficiente, enunciada na primeira alínea, às duas que já se tinham introduzido) tem características que o tornam muito pouco útil (daí talvez não se encontrar na literatura, tanto quanto sei): se utilizado a nível de uma iniciação à Análise no Secundário teria uma demonstração dificilmente acessível, atendendo ao que acima ficou exposto; se utilizado a nível do ensino superior, tendo sido abordado, por exemplo, o estudo das subsucessões e de alguns resultados simples relativos à existência de limite de sucessão envolvendo o referido conceito, ou então a definição de Cauchy de limite, a demonstração do teorema ficaria bastante simples, sendo o enunciado do teorema de certo modo "desproporcionado", na respectiva complexidade, à demonstração, sobretudo porque, na prática, é a condição suficiente que se desejaria, em geral, utilizar. Ora um teorema cuja demonstração é tão ou mais clara ou tão ou mais curta do que o enunciado não apresenta obviamente grande utilidade matemática; o tempo perdido a decifrar e verificar as condições da hipótese em cada caso concreto poderia ser usado, talvez com vantagem, numa demonstração directa da tese nesse caso particular...

Continuidade da composta:

Com a definição de continuidade baseada no *limite incluído*, a continuidade da composta é uma trivialidade, já que é corolário imediato do teorema do limite da composta, razão pela qual aparece nas metas apenas com a menção "justificar", o que se usa quando a demonstração pedida é muito imediata (FRVR 11.2):

10. Justificar, dadas funções reais de variável real f e g e $a \in D_{g\circ f}$, que se f é contínua em a e g é continua em $f(a)$ então a função composta $g \circ f$ é contínua em a.

Já com a definição usual de continuidade baseada no *limite excluído*, mesmo presumindo que se adopta a definição que leva em conta o caso dos pontos isolados, tornar-se-ia difícil a nível do Ensino Secundário demonstrar este último resultado, mais uma vez por não se dispor em geral de resultados relativos a limites envolvendo subsucessões.

Esbarraríamos no mesmo escolho anteriormente detectado e que resulta da "assimetria" inerente à definição de *lime*, no sentido em que as sucessões x_n que se tomam "a tender para a" não tomam o valor a mas não se impede que as sucessões $f(x_n)$ tomem o valor do respectivo limite…

Com efeito, se tentássemos uma demonstração directa, não incluindo a prévia demonstração de resultados adequados envolvendo o conceito de subsucessão iríamos deparar-nos com dificuldades talvez inesperadas apesar do carácter intuitivo das conclusões que é necessário extrair.

Excluindo já o caso trivial dos pontos isolados do domínio de $g \circ f$, se x_n for sucessão de pontos deste domínio a tender para a (por valores diferentes), $f(x_n)$ tende para $f(a)$, por definição de função contínua. Teremos agora de provar que $g(f(x_n))$ tende para $g(f(a))$; mas não basta aplicar a definição de continuidade de g baseada no *lime*, pois não sabemos se $f(x_n)$ toma ou não o valor $f(a)$… Assim, teremos de construir a partir de $f(x_n)$ subsucessões (designando-as ou não assim…) respectivamente com os termos diferentes de e iguais a $f(a)$, a partir das quais seja depois possível concluir que a sucessão $g(f(x_n))$ tende de facto para $g(f(a))$.

Note-se ainda que, com o *limite excluído*, mesmo tentando utilizar um resultado admitido sem demonstração relativo à continuidade da composta para justificar algumas das passagens ao limite anteriormente examinadas, poderiam surgir outras dificuldades. Voltando a examinar o limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)}{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}},$$

poderíamos começar por definir funções contínuas f e g dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

e concluir, pela continuidade da composta, que $f \circ g$ é contínua em 0, donde se deduziria a existência e valor do limite em questão. Mas note-se que a função original tem domínio igual a:

$$\left]-\infty, -\frac{1}{\pi}\right[\cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left]-\frac{1}{n\pi}, -\frac{1}{(n+1)\pi}\right[\cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left]\frac{1}{(n+1)\pi}, \frac{1}{n\pi}\right[$$
$$\cup \left]\frac{1}{\pi}, +\infty\right[$$

pelo que 0 não é "interior a" nem "extremo de" nenhum intervalo não degenerado de interior contido neste domínio, o que exclui esta função (se for apenas prolongada ao ponto em que se calcula o limite) do âmbito em que a continuidade era estudada em muitos dos manuais utilizados com o anterior programa, embora 0 seja ponto de acumulação do referido domínio. Apenas alguns manuais abrangiam esta situação, mas entre estes também nem todos enunciavam depois correctamente as definições e/ou alguns dos resultados relativos a funções contínuas.

Teríamos assim ainda de argumentar que a existência e o valor do limite em 0 de $f \circ g$ implica a existência, com o mesmo valor, do limite em 0 de

$$\frac{\operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \frac{1}{x})}{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}},$$

o que, sendo fácil pela definição de limite, poderia ter de ser feito sem passar pela continuidade desta última função (prolongada a 0) e voltando antes ao âmbito dos limites de função, desde que também aqui não tivesse havido restrições de domínio que excluíssem esta situação.

Há que reconhecer que a opção de não introduzir no Secundário a noção de subsucessão e as propriedades essenciais dos limites que envolvem essa noção, nem os limites e continuidade "à Cauchy", tem um "preço" para ambas as definições de limite.

Já vimos que, quanto à continuidade da composta, esse preço é apenas devido pelo *lime*, mas levantam-se dificuldades semelhantes, desta vez para ambas as definições, se pretendermos justificar as propriedades usuais envolvendo limites laterais; foi essa a razão pela qual nas metas se colocaram tais propriedades sem exigência de demonstração, apenas como "saber" (FRVR11-1):

5. Saber, dada uma função real de variável real f e um ponto a aderente ao respetivo domínio D_f, que se $a \notin D_f$ e se os limites $\lim_{x\to a^-} f(x)$ e $lim_{x\to a^+} f(x)$ existirem e forem iguais, então existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ e que, nesse caso, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$.

6. Saber, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in D_f$, que se os limites $\lim_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existirem e forem ambos iguais a $f(a)$, então existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ e que, nesse caso, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$.

Um pequeno preço suplementar a pagar pela "nova" definição: Quanto a estas questões há uma pequena distinção entre as duas definições, no caso em que se lida com o limite num ponto a não isolado do domínio, pois quanto ao *limite excluído* o problema reside apenas na possibilidade de se ter de lidar com sucessões tomando simultaneamente valores superiores e valores inferiores ao ponto em que se calcula o limite, ao passo que com o *limite incluído*, tais sucessões podem ainda tomar esse ponto como valor. Mas com qualquer delas, sem invocar propriedades envolvendo subsucessões, com os pré-requisitos habituais em vigor no Ensino Secundário, torna-se necessário admitir sem demonstração um resultado como o FRVR11-1.5 atrás reproduzido.

Já quanto à continuidade, com as definições envolvendo o *limite excluído*, pode concluir-se imediatamente (por definição) que uma função f é contínua num ponto a não isolado do domínio desde que tenha limite ("por valores diferentes") nesse ponto igual ao valor da função, ao passo que com o *limite incluído*, se apenas soubermos que existe limite em a, por valores diferentes, igual a $f(a)$, também neste caso teríamos de utilizar propriedades envolvendo subsucessões para concluir a continuidade. Há aqui portanto um pequeno preço suplementar a pagar por se adoptar esta definição, que é afinal "mais exigente" para se verificar que determinada função é contínua num ponto não isolado do domínio.

Exemplifiquemos; para uma função como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \\ \frac{e^x - 1}{x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Tanto com a definição de continuidade baseada no *lime* como com a que se baseia no *limi*, para concluirmos a continuidade de f em 1 teremos de invocar uma propriedade envolvendo limites laterais como a acima reproduzida (FRVR11-1.6) e que, como vimos, dificilmente poderá ser demonstrada no Secundário, não se dispondo de propriedades envolvendo subsucessões. Já para uma função como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

com a definição de continuidade baseada no *limite excluído* é óbvio que f é contínua em 0 por definição, ao passo que com a definição que se baseia no *limite incluído* é necessário também aqui invocar qualquer propriedade como FRVR11-1.6.

Ainda poderíamos examinar o seguinte exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Mais uma vez, com a definição baseada no *lime* é fácil verificar que f é contínua, por definição (desde que o limite em 0 seja considerado conhecido, pois com a abordagem através do *lime*, mesmo partindo do limite "notável" de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ em 0, dificilmente se poderia dispensar depois um recurso directo à definição de limite para justificar a existência e valor do limite de $\frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ no mesmo ponto...); com o *limi*, neste caso, sendo embora imediato passar do referido limite notável para o limite à direita de f em 0 (invocando apenas o teorema do limite da composta), não bastaria em seguida invocar FRVR11-1.6, já que não existe limite à esquerda... Poderíamos utilizar uma propriedade semelhante envolvendo o limite "por valores diferentes", ou então começar por prolongar a função, por exemplo, por 1 aos valores negativos de x, aplicar FRVR11-1.6 a essa função e em seguida concluir que f é contínua em 0 por ser restrição de uma contínua...

Assim, há este pequeno preço a pagar por se substituir as "antigas" definições pelas "novas" na abordagem da noção de limite no Secundário, mas esse preço resulta apenas de, na definição de continuidade, se exigir "menos" (à partida) quando se usa o *lime* do que quando se usa o *limi* (basta testar o que se passa com um conjunto mais reduzido de sucessões); em contrapartida, essa menor exigência tem depois como consequência, entre muitas outras também atrás analisadas, que se torna tarefa mais complexa (fora do alcance usual do Ensino Secundário) justificar um resultado tão básico quanto a continuidade da composta. Assim este "preço" parece bastante exíguo em comparação com o preço de as manter...

5. BIBLIOGRAFIA

[1] Bivar, A.; Grosso, C.; Oliveira, F.; Timóteo, M.C. 2014. *http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Formacao/es_limite_funcao_analise_de_uma_opcao.pdf* (acedido a 27/8/2018)

[2] Costa, B.; Resende, L.C.R.; Rodrigues, E., *Espaço 12*, 2.ª edição, ASA (2010).

[3] Figueira, M.S.R. *Fundamentos de Análise Infinitesimal*, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (1996).

[4] Ferreira, J.C. *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa (1987).

[5] Gomes, F.; Viegas, *C. XEQ MAT, Matemática, 12.º Ano, Volume 2*, Texto Editores, Lisboa (2005)

[6] Guerreiro, J.S. *Curso de Análise Matemática*, Escolar Editora, Lisboa (2008).

[7], Lima, E.L. *Curso de Análise, Volume 1*, IMPA, 5.ª edição, Rio de Janeiro (1987).

[8] Ministério da Educação e Ciência. *Programa e Metas Curriculares, Matemática A, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas, http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf* (acedido a 27/8/2018).

[9] Neves, M.A.F.; Guerreiro, L.; Moura, A. *Funções III, Matemática A, 12.º ano*, Porto Editora, Porto (2010).

[10] Oliveira, A.J.F., "Limites Alternativos", *Gazeta da Matemática*, N. 184, Mar. 2018, pp. 18-27.

[11] Silva, J.C., *Manual NiuAleph 12*, vol. 3 *http://niualeph.eu/download/niualeph12/manual/niualeph12_manual_vol3_v01.pdf* (acedido a 27/8/2018).

[12] Silva, J.S.; Paulo J.D.S. *Compêndio de Álgebra, 1º Tomo, 6º ano*, Braga (1968).

Por decisão própria, o autor não escreve segundo o novo acordo ortográfico.

SOBRE O AUTOR

António Bivar é professor associado aposentado da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e foi membro da equipa de coordenação científica e co-autor dos novos programas de Matemática do Ensino Básico e Secundário.