A DESIGUALDADE TETRAEDRAL

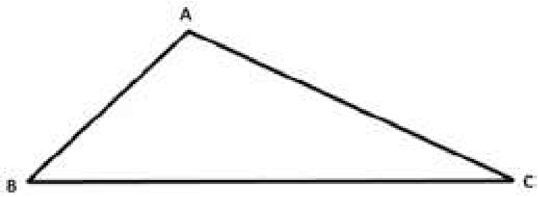
Uma prima da desigualdade triangular. Ou filha?

João Filipe Queiró
Universidade de Coimbra
jfqueiro@mat.uc.pt

1. INTRODUÇÃO

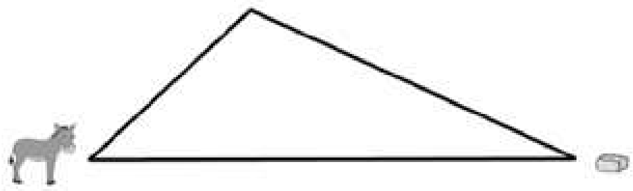
A 20.ª Proposição do 1.º Livro dos *Elementos* de Euclides diz o seguinte:

> Num triângulo, a soma dos comprimentos de dois quaisquer lados é maior do que o comprimento do lado restante.



Esta é a "desigualdade triangular", um facto básico da matemática. Euclides prova-a meticulosamente, recorrendo a proposições anteriores (a 5.ª e a 19.ª) e à 5.ª "noção comum" do 1.º Livro, que diz que "O todo é maior do que a parte."

Nas suas anotações aos *Elementos* [1], Thomas Heath cita a respeito disto o *Comentário* de Proclo [4]. Este refere os epicuristas, que ridicularizavam a proposição, dizendo que é evidente até para um burro e não precisa de demonstração. Justificavam esta afirmação dizendo que, se se colocar um fardo de palha num dos vértices do triângulo e um burro esfomeado noutro vértice, o burro seguirá o caminho do lado que une esses vértices e não o que percorre os outros dois lados.



Heath acrescenta que Henry Savile, numas lições sobre os *Elementos* publicadas em Oxford em 1621, diz que quem assim argumentava era digno de ir com o burro comer a palha.

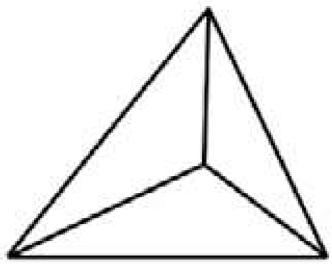
Proclo, escrevendo no século V, explica o que está em causa: uma coisa é o que nos parece, outra é a prova ou explicação científica. Esta distinção permanece relevante nos dias de hoje, não só para se compreender a natureza da matemática mas também para nos orientarmos em questões de ensino (veja-se, por exemplo, [2] e [3]). Mas o fundo do problema vai além disto e muito além do pequeno contexto de que partimos.

Em várias grandes universidades norte-americanas podemos encontrar à venda T-shirts com a seguinte inscrição: "Está bem, isso funciona na prática. Mas será que funciona na teoria?" É uma boa piada, mas levanta também uma questão profunda. Qual é a segurança do nosso conhecimento? Ao longo da história, houve um enorme esforço humano no caminho em direcção a uma maior certeza do conhecimento. Os humanos sempre quiseram saber mais e saber melhor, saber com mais segurança. Na Física, na Química, nas Ciências da Vida e numa certa visão das Ciências Sociais – que não inclui os interessados no reino da pura opinião não constrangida pela realidade – a busca de cada vez maior certeza vem da busca de factos, do respeito por eles, da sua representação, hierarquização e relacionação, da delimitação dos contextos em que as análises são válidas. Em tudo isto a matemática desempenha ou pode desempenhar um papel central.

Terminando aqui este intervalo "epistemológico", voltemos ao nosso tema.

2. DOS TRIÂNGULOS AOS TETRAEDROS

Pensemos no irmão tridimensional do triângulo: o tetraedro, ou pirâmide de base triangular. As suas quatro faces são triângulos.



Se formos à procura de uma afirmação sobre tetraedros que corresponda à desigualdade triangular, logo observamos que

> num tetraedro, a soma das áreas de três quaisquer faces é maior do que a área da face restante.

Isto – a que podemos chamar a "desigualdade tetraedral" – tem o mesmo grau de evidência que a desigualdade triangular, embora não se veja bem quem é que pode substituir o burro dos epicuristas neste caso.

Sem dúvida que é possível apresentar uma demonstração no mesmo espírito que a de Euclides para a 20.ª Proposição do 1.º Livro dos *Elementos*, o que até será um bom exercício. Mas, como vamos ver, podemos demonstrar a desigualdade de forma muito rápida seguindo outra via.

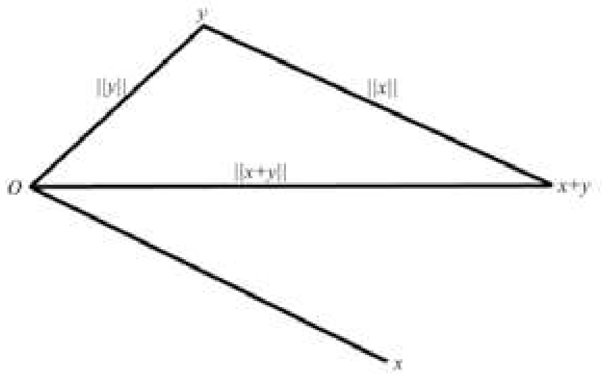
3. PROVA DA DESIGUALDADE TETRAEDRAL

Precisamos de introduzir alguma estrutura no espaço tridimensional vulgar:

- Um ponto O que escolhemos para origem;
- A soma de dois pontos x e y, denotada por $x+y$, pelo habitual processo de completar o paralelogramo a partir dos três vértices O, x e y;
- O produto de um ponto x por um número real α, denotado por αx, com o significado geométrico óbvio;
- A norma ou o comprimento de x, definido como a distância $\|x\|$ de x à origem.

Neste contexto, a desigualdade triangular aplicada ao triângulo de vértices O, y e $x+y$ diz simplesmente que

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$



É fácil ver que esta versão algébrica da desigualdade triangular permanece válida para mais do que duas parcelas. Por exemplo, para x, y, z arbitrários, tem-se

$$\|x+y+z\| \leq \|x\| + \|y\| + \|z\|.$$

Vamos ver uma demonstração muito simples da desigualdade tetraedral usando um conceito básico de Álgebra Linear, o produto externo de pontos do espaço tridimensional [5].

Sejam x e y dois tais pontos. Há duas maneiras de definir $x \wedge y$, o produto externo de x por y. Uma usa coordenadas em relação ao vulgar sistema de eixos usado em geometria analítica: sendo $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$, tem-se

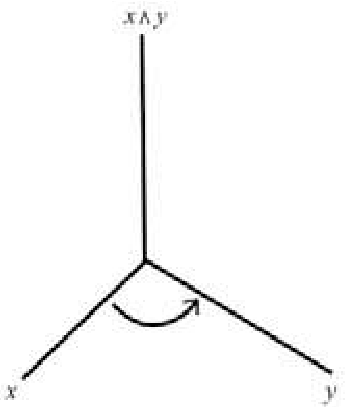
$$x \wedge y := (x_2 y_3 - y_2 x_3,\ y_1 x_3 - x_1 y_3,\ x_1 y_2 - y_1 x_2)\,.$$

A outra forma de definição não usa coordenadas, sendo por isso preferida em Física. Nesta segunda forma, $x \wedge y$ é o ponto no espaço assim identificado:

- O segmento que vai da origem para $x \wedge y$ é perpendicular aos segmentos que vão da origem para x e da origem para y;
- A norma de $x \wedge y$ é igual a $\|x\|\|y\| \operatorname{sen}\theta$, onde θ é

o (menor) ângulo definido pelos segmentos que vão da origem para x e da origem para y;

▶ Os segmentos que vão da origem para x, da origem para y e da origem para $x \wedge y$ formam um triedro directo, isto é, a rotação mais curta do primeiro segmento que o leva a sobrepor-se ao segundo segmento é feita, para um observador com os pés na origem e a cabeça na extremidade do terceiro segmento, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

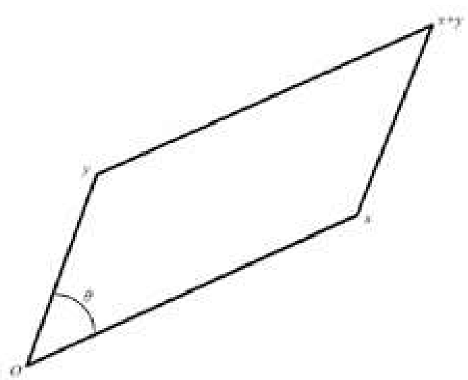


Que as duas definições são equivalentes pode ver-se, por exemplo, em [5].

Usando a primeira forma da definição é simples ver que o produto externo satisfaz as seguintes propriedades:

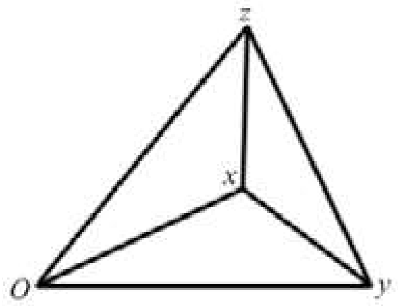
- ▶ $x \wedge x = 0$;
- ▶ $y \wedge x = -x \wedge y$;
- ▶ $(x + x') \wedge y = x \wedge y + x' \wedge y$,
  $x \wedge (y + y') = x \wedge y + x \wedge y'$;
- ▶ $(\alpha x) \wedge y = x \wedge (\alpha y) = \alpha(x \wedge y)\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

Da segunda forma da definição interessa-nos a expressão para a norma de $x \wedge y$: é imediato que $\|x\|\|y\| \operatorname{sen}\theta$ é a área do paralelogramo de vértices O, x, y e $x + y$.



Daqui tiramos uma fórmula para a área do triângulo de vértices O, x e y: essa área é simplesmente igual a $\frac{1}{2}\|x \wedge y\|$.

Olhemos então para um tetraedro arbitrário. Não há perda de generalidade em supor que um dos seus vértices está na origem. Designemos os restantes três vértices por x, y e z.



As quatro faces do tetraedro são então os triângulos com vértices

$$O, x, y$$
$$O, x, z$$
$$O, y, z$$
$$x, y, z$$

Já dispomos de fórmulas para as áreas dos três primeiros:

$$\frac{1}{2}\|x \wedge y\|, \;\; \frac{1}{2}\|x \wedge z\|, \;\; \frac{1}{2}\|y \wedge z\|\,.$$

Falta o quarto. Como a área é invariante por translação, a área do quarto triângulo é igual à área do triângulo com vértices O, $y - x$ e $z - x$, ou seja, é igual a

$$\frac{1}{2}\|(y - x) \wedge (z - x)\|\,.$$

Usando as propriedades do produto externo, vemos que

$$\begin{aligned} (y - x) \wedge (z - x) &= y \wedge z - y \wedge x - x \wedge z + x \wedge x \\ &= x \wedge y + y \wedge z + z \wedge x\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|(y - x) \wedge (z - x)\| &= \|x \wedge y + y \wedge z + z \wedge x\| \\ &\leq \|x \wedge y\| + \|y \wedge z\| + \|z \wedge x\|\,. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros por $1/2$, concluímos que a área da face com vértices x, y, z é menor ou igual à soma das áreas das outras três faces do tetraedro. Um raciocínio análogo prova a desigualdade para a área de qualquer outra face.

Vemos assim que a desigualdade tetraedral é consequência imediata da desigualdade triangular, o que retira protagonismo à primeira e reforça o carácter fundamental da segunda.

REFERÊNCIAS

[1] Euclid, *The Thirteen Books of the Elements*, with introduction and commentary by Thomas L. Heath, vol. I, New York, Dover, 1956.

[2] Yolanda Lima, *Geometria no Secundário. Conjecturar e provar – exemplos*, Boletim da SPM, n.º 39, pp. 77-85, 1998.

[3] Armando Machado, *O ensino da Matemática para a formação de professores*, em "O Ensino da Matemática na Universidade em Portugal e Assuntos Relacionados", L. Trabucho de Campos e J. F. Queiró (eds.), Centro Internacional de Matemática, p. 7-11, 2000. Actas disponíveis em *http://www.mat.uc.pt/~jfqueiro/debate2.pdf*

[4] Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, Princeton University Press, 1970.

[5] A. P. Santana e J. F. Queiró, *Introdução à Álgebra Linear*, Lisboa, Gradiva, 2010.