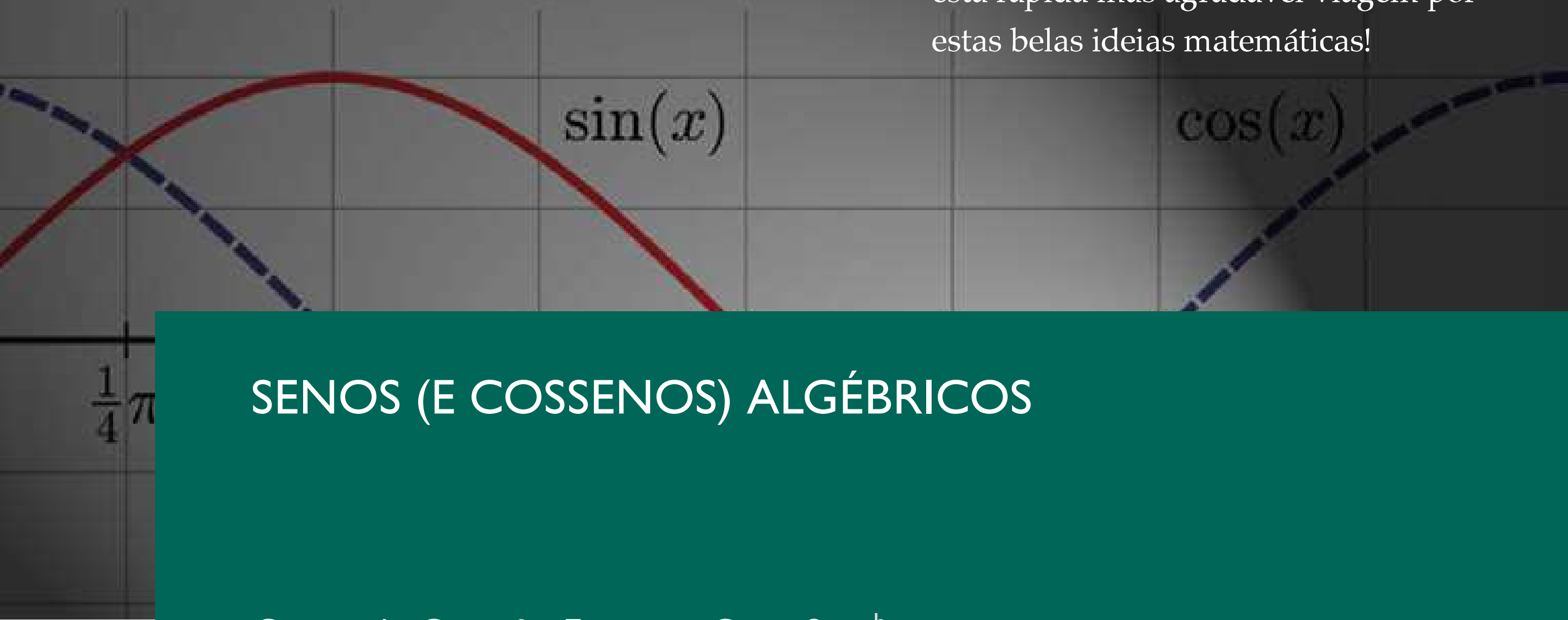
A história e o desenvolvimento dos conceitos de números algébricos e de números transcendentes é bastante rica, cheia de factos surpreendentes e de uma beleza extraordinária. Neste trabalho apresentamos, no nosso ver, os principais factos relacionados com o tema, localizando historicamente as várias personagens que participaram nessa jornada, e concluiremos apresentando uma família de valores de senos (e cossenos) que são números algébricos. Por fim, será exibido um polinómio não nulo, de coeficientes inteiros, que admite o sen1^o como raiz. Convidamos o leitor a fazer connosco esta rápida mas agradável viagem por estas belas ideias matemáticas!



SENOS (E COSSENOS) ALGÉBRICOS

Carlos A. Gomes[a] e Eurípedes C. da Silva[b]
DMAT – UFRN – Brasil[a] e DMAT – IFCE – Brasil[b]
cgomesmat@gmail.com[a] e euripedescarvalhomat@gmail.com[b]

1. INTRODUÇÃO

Os números reais são classificados sob diversos aspetos, entre os mais conhecidos está a classificação de um número real como sendo racional ou irracional. Um número real α é dito racional, quando existem inteiros p e q, com $q \neq 0$ tais que $\alpha = p/q$. Como de costume, representaremos o conjunto dos números racionais por $\mathbb{Q}$. Os números $\sqrt{2}$, e e π são exemplos bem conhecidos de números irracionais. A primeira demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional geralmente é atribuída a Hippasus de Metapontum (550 a.C.), que pertencia à escola pitagórica. Mais tarde, essa demonstração foi imortalizada nos Elementos de Euclides. Em 1737, o matemático suíço Leonard Euler foi o primeiro a provar que o número e é irracional (apesar de que a prova mais conhecida hoje é devida ao matemático francês Joseph Fourier, *vide* [3]). No caso do π, a primeira prova da sua irracionalidade foi dada por Lambert. Em 1761, ele provou que se $x \in \mathbb{Q}$ então $tg(x)$ é irracional. Assim, como $tg(\pi) = 0$, segue desse resultado que π é irracional. A prova mais popular da irracionalidade de π (que aparece na maioria dos livros) é devida ao professor Ivan Niven em [10].

Alternativamente, podemos definir um número real α como sendo racional quando for raiz de um polinómio do primeiro grau cujos coeficientes são inteiros. De facto, dado um racional $\alpha = p/q$, com p e q inteiros, com $q \neq 0$, segue que α é raiz do polinómio $f(x) = qx - p$, cujos coeficientes são inteiros, visto que

$$f(\alpha) = q.\alpha - p = q \cdot \frac{p}{q} - p = p - p = 0.$$

Reciprocamente, se α é raiz de um polinómio não nulo de grau 1 com coeficientes inteiros, $f(x) = qx + p$, então α é racional. De facto, $f(\alpha) = 0$ implica

$$q\alpha + p = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Em particular, $\sqrt{2}$ não é raiz de nenhum polinómio nessas condições, já que tal contradiria a sua irracionalidade.

Entretanto, o número $\sqrt{2}$ é raiz de um polinómio de grau 2 (com coeficientes inteiros), a saber: $p(x) = x^2 - 2$. Nesse contexto podemos classificar os números reais (na verdade, os números complexos) como sendo algébricos ou transcendentes, sendo algébricos aqueles que são raízes de um polinómio não nulo com coeficientes inteiros e transcendentes aqueles que não o são. Dizemos ainda que um número real (ou complexo) α é algébrico de grau $\boldsymbol{n}$, quando ele for raiz de um polinómio com coeficientes inteiros e de grau n, e se não existir um outro polinómio não nulo com coeficientes inteiros, de grau menor do que n, do qual α seja raiz.

No contexto dessas ideias, note que os números irracionais não são números algébricos de grau 1. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é algébrico de grau 2. Como um número transcendente não é raiz de nenhum polinómio não nulo com coeficientes inteiros, podemos encarar os números transcendentes como um conceito mais amplo do que os irracionais da seguinte forma: os irracionais são os números reais que não são algébricos de grau 1, já os trancendentes são aqueles números reais (ou complexos) que não são algébricos de nenhum grau.

Em 1874, o matemático alemão Georg Cantor (1845-1918) provou um facto surpreendente: o conjunto dos números algébricos é enumerável (*vide* [3]). A enumerabilidade desse conjunto implica a existência de uma "quantidade" infinitamente maior de transcendentes do que de algébricos, muito embora se conhecessem pouquíssimos exemplos explícitos. Esse facto é bastante curioso; se quase todos os números são transcendentes, é muito estranho que demonstrar a transcendência de um número seja, em geral, uma tarefa tão complicada como afirma Diego Marques em [8].

Ao longo do tempo, grandes matemáticos deram as suas contribuições a essa linha de pesquisa, como Euler, Liouville, Cantor, Weierstrass, Lindemann, Hermite, Hilbert, Sigel, e Hardy, entre muitos outros, mas o primeiro número a ter a sua transcendência demonstrada foi $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$, em 1851, fruto do trabalho do matemático francês Joseph Liouville (1809-1882). Desde então, esse número passou a ser chamado de constante de Liouville em sua homenagem (existe uma prova desse facto em [9]).

Em 1873, Charles Hermite (1822-1901) provou que e (número de Euler) é transcendente (*vide* [3]). Aproximadamente uma década após essa célebre constatação, o alemão Ferdinand Von Lindemann (1852-1939) provou que e^{α} é transcendente, sempre que α é algébrico não nulo. Com isso, Lindemann publicou uma bela demonstração de que π é transcendente (*vide* [3]), o que levou à solução de um dos três problemas clássicos de construção com régua e compasso dos gregos antigos: a quadratura do círculo. O facto de π ser transcendente revelou que tal construção é impossível.

Mesmo sabendo que π e e são irracionais, até hoje não sabemos se $\pi + e$ e $\pi \cdot e$ são irracionais. O que se sabe é que, pelo menos, um deles é irracional. Isso pode ser esclarecido como decorrente do facto de que π é transcendente. Na realidade, os números π e e são as raízes da equação quadrática $x^2 - (\pi + e)x + \pi \cdot e = 0$. Supondo que $\pi + e$ e $\pi \cdot e$ fossem ambos racionais, i.e., $\pi + e = {}^a/_b$ e $\pi \cdot e = {}^c/_d$, com a, b, c e d inteiros ($b \neq 0, d \neq 0$), teríamos que

$$x^2 - (\pi + e)x + \pi \cdot e = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{a}{b}x + \frac{c}{d} \\ \Leftrightarrow bdx^2 - adx + bc = 0.$$

Ora, como π é uma das raízes dessa equação, teríamos que $bd\pi^2 - ad\pi + bc = 0$, o que implicaria que π seria algébrico, uma contradição! Logo a nossa hipótese inicial de que $\pi + e$ e $\pi.e$ fossem ambos racionais não pode ser verdadeira, donde concluímos que, pelo menos, um deles é irracional.

Em 1900, no Congresso Internacional de Matemática em Paris, o matemático alemão David Hilbert propôs a sua famosa lista de 23 problemas, na qual o 7.° perguntava se o logaritmo de um número algébrico numa base algébrica seria algébrico ou transcendente. Em 1934, trabalhando independentemente, Alexander Gelfand e Theodor Schneider, em 1935, demonstraram o seguinte facto: se α é algébrico, diferente de 0 e 1, e β é algébrico irracional, então α^β é transcendente (*vide* [11]). Assim, por exemplo, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $5^{\sqrt[3]{4}}$, $e^\pi = (-1)^{-i}$ e 2^i são números transcendentes.

2. SENOS (E COSSENOS) ALGÉBRICOS

Há alguns anos, folheando o livro *Tópicos de Álgebra* [4] (ou [5]), encontramos um curioso problema:

Prove que o sen1^o é um número algébrico.

Na época tentámos solucionar o problema sem muito sucesso. Recentemente, de modo inesperado, encontrámos em [1] um problema mais geral relacionado com esse problema de o sen1^o ser algébrico. A solução do problema que encontrámos é bastante simples e elegante, além de que utiliza apenas recursos elementares. Agora, neste pequeno artigo, vamos exibir esse problema assim como a sua solução, que revela uma ampla classe de números algébricos que são valores assumidos pelas funções trigonométricas seno e cosseno, como, por exemplo, o sen1^o, o que resolve o nosso velho e bom problema de anos atrás.

Nesta secção vamos provar que se $\alpha \in \mathbb{Q}$, então $\cos(\alpha\pi)$ e $\operatorname{sen}(\alpha\pi)$ são ambos números algébricos.

De facto, como $\alpha \in \mathbb{Q}$, segue que existem $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$ tais que $\alpha = {}^a/_b$. Se φ é um número real, então

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^{4b} = \cos(4b\varphi) + i \operatorname{sen}(4b\varphi). \qquad (1)$$

Por outro lado, pelo binómio de Newton, temos que:

$$(\cos\varphi \operatorname{sen} + i \operatorname{sen}\varphi)^{4b} = \sum_{k=0}^{4b} \binom{4b}{k} (\cos(\varphi))^{4b-k} (i \operatorname{sen}(\varphi))^k. \qquad (2)$$

Igualando as partes reais das equações (1) e (2), segue que:

$$\cos(4b\varphi) = \cos^{4b}\varphi - \binom{4b}{2}\cos^{4b-2}\varphi.\operatorname{sen}^2\varphi + \cdots \\ \cdots - \binom{4b}{4b-2}\cos^2\varphi.\operatorname{sen}^{4b-2}\varphi + \operatorname{sen}^{4b}\varphi.$$

Como $\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, na expressão do $\cos(4b\varphi)$, para cada inteiro $1 \leq t \leq 2b$, podemos fazer a substituição

$$\operatorname{sen}^{2t}\varphi = (\operatorname{sen}^2\varphi)^t = (1 - \cos^2\varphi)^t,$$

o que nos permite escrever $\cos(4b\varphi)$ como

$$\cos(4b\varphi) = f(\cos\varphi),$$

onde f é um polinómio com coeficitentes inteiros. Fazendo $\varphi = \alpha\pi$, segue que

$$f(\cos(\alpha\pi)) = \cos(4b\alpha\pi) = \cos(4b\frac{a}{b}\pi) = \cos(4a\pi) = 1.$$

Assim, considerando o polinómio (de coeficientes inteiros) $g(x) = f(x) - 1$, obtemos

$$g(\cos(\alpha\pi)) = f(\cos(\alpha\pi)) - 1 = 1 - 1 = 0,$$

o que revela que o $\cos(\alpha\pi)$ é um número algébrico quando $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Além disso, vamos mostrar que $g(\operatorname{sen}(\alpha\pi)) = 0$. De facto,

$$\begin{aligned} f(\operatorname{sen}(\alpha\pi)) &= f\left(\cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\pi)\right) \\ &= \cos\left(4b(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\pi)\right) \\ &= \cos\left(4b(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{a}{b}\pi)\right) \\ &= \cos((b - 2a)2\pi) = 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$g(\operatorname{sen}(\alpha\pi)) = f(\operatorname{sen}(\alpha\pi)) - 1 = 1 - 1 = 0,$$

o que revela que $\operatorname{sen}(\alpha\pi)$ é um número algébrico quando $\alpha \in \mathbb{Q}$.

No caso particular em que $\alpha = {}^1/_{180}$, temos que ${}^1/_{180}\pi = 1^o$. Temos então um polinómio g de coeficientes inteiros e de grau $4 \times 180 = 720$ tal que $g(\operatorname{sen} 1^o) = 0$, revelando que sen 1^o é algébrico, o que resolve o nosso velho problema.

Apesar de termos exibido um polinómio g com coeficientes inteiros de grau 720, tal que $g(\cos 1^o) = 0$, não podemos afirmar que $\cos 1^o$ é algébrico de grau 720, visto que esse não é o polinómio de coeficientes inteiros de menor grau que tem $\cos 1^o$ como raiz. Por exemplo, pode-se demonstrar que o polinómio

$$\begin{aligned} p(x) = {} & 281474976710656x^{48} - 3377699720527872x^{46} \\ & + 18999560927969280x^{44} - 66568831992070144x^{42} \\ & + 162828875980603392x^{40} - 295364007592722432x^{38} \\ & + 411985976135516160x^{36} - 452180272956309504x^{34} \\ & + 396366279591591936x^{32} - 280058255978266624x^{30} \\ & + 160303703377575936x^{28} - 74448984852135936x^{26} \\ & + 28011510450094080x^{24} - 8500299631165440x^{22} \\ & + 2064791072931840x^{20} - 397107008634880x^{18} \\ & + 59570604933120x^{16} - 6832518856704x^{14} \\ & + 583456329728x^{12} - 35782471680x^{10} \\ & + 1497954816x^{8} - 39625728x^{6} \\ & + 579456x^{4} - 3456x^{2} + 1 \end{aligned}$$

tem grau 48 e cumpre as condições $p(\cos 1^o) = 0$ e $p(\operatorname{sen} 1^o) = 0$, como pode ser visto em [7], [2] ou *https://math.stackexchange.com/questions/1838116/the-other-47--roots-of-the-minimal-polynomial-for-cos-1-circ.*

De modo mais geral, pode provar-se que o menor grau de um polinómio de coeficientes inteiros tal que $p(\cos {}^{(2\pi)}/_{n}) = 0$, com $n \geq 3$, é ${}^{1}/_{2}\varphi(n)$, onde φ é a função phi de Euler. Lembremos que

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right),$$

e $p_1, p_2, \cdots, p_k$ são os primos que aparecem na decomposição do inteiro positivo n em fatores primos (veja, por exemplo, [6]). No caso do $\cos 1^o = \cos({}^{2\pi}/_{360})$, segue que

$$\varphi(360) = 360\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 96.$$

Assim, o menor grau de polinómio de coeficientes inteiros tal que $p(\cos 1^o) = 0$ é ${}^{96}/_{2} = 48$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bergen, J. *A Concrete Approach to Abstract Algebra: From the Integers to the Insolvability of the Quintic.* First edition . Academic Press. 2010.

[2] Cox, David A. *Galois Theory*. Second edition. John Wiley & Sons. 2013.

[3] Figueiredo, Djairo Guedes de. *Números Irracionais e Transcendentes*.Terceira edição. SBM. 2012.

[4] Herstein, I. *Tópicos de Álgebra*. Primeira edição. Editora Polígono. SP. 1970.

[5] Herstein, I. *Tópics in Algebra*. Fist edition. Ginn and Company. 1964.

[6] Watkins, William; Zeitlin, Joel. "The Minimal Polynomial of $\cos({}^{2\pi}/_{n})$". *The American Mathematical Monthly*, Vol. 100, No. 5 (May, 1993), pp. 471-474.

[7] Lehmer, D. H. "A Note on Trigonometric Algebraic Numbers". *The American Mathematical Monthly* - Vol. 40, No. 3 (Mar., 1933), pp. 165-166.

[8] Marques, Diego. *Teoria dos Números Transcendentes.* Primeira edição. SBM. 2013.

[9] Niven, I. *Números: Racionais e Irracionais*.Primeira edição.SBM.2012.

[10] Niven, I. *Números: Irrational Numbers*. First edition. The Carus Monographs. MAA - The Matematical Assotiation of America.1956.

[11] Rose, H. E. *A Course in Number Theory*. First edition. Oxford Science Publications. 1988.

SOBRE OS AUTORES

Carlos A. Gomes possui bacharelato em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2000) emestrado em Matemática Aplicada e Estatística pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2010). É doutorado em Matemática pelo IME-USP (2017). É professor no departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte e coordenador regional da OBM-Olimpíada Brasileira de Matemática. Tem experiência na área de Matemática e Probabilidade, com ênfase em Matemática, e interesse principalmente nos seguintes temas: Álgebras Lie, Módulos de peso, Módulos de Gelfand-Tsetlin, Teoria das representações, Grupos de Lie e Olimpíadas de Matemática.

Eurípedes C. da Silva possui licenciatura em Matemática pela Universidade Regional do Cariri (2010) e mestrado em Matemática Pura pela Universidade Federal do Ceará (2012). É doutorado pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, IME-USP (2017). Atualmente, é professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará. Tem interesse nas áreas de Geometria Diferencial, com ênfase em Geometria Diferencial de Folheações, Topologia Diferencial e Análise Geométrica.