Somas de números naturais consecutivos

António Pereira Rosa
Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho, Lisboa

1. Introdução

O objectivo deste trabalho é abordar o problema da representação de números naturais por meio de somas de dois ou mais números naturais consecutivos. Estuda-se a possibilidade e a unicidade de uma tal representação e descrevem-se algoritmos para a obter; veremos ainda uma caracterização menos conhecida dos números primos ímpares. Utilizam-se apenas ferramentas matemáticas muito simples, como algumas propriedades das progressões aritméticas e propriedades elementares de divisibilidade em *IN*[1].

2. O problema da representação

É óbvio que há números naturais que não podem ser escritos como soma de naturais consecutivos, como 2 e 4. Por outro lado, é claro que qualquer número *ímpar* maior que 1 pode ser escrito nesta forma: se n é ímpar, $n = C\left(\frac{n}{2}\right) + \left[C\left(\frac{n}{2}\right) + 1\right]$, sendo $C(n)$ a característica de n. Esta representação como soma de duas parcelas é única (um exercício simples, que se pode propor aos alunos) e, evidentemente, é impossível para números pares[2].

No que se segue, vão ser utilizados os chamados números triangulares 1, 3, 6, 10, 15, 21,... que são definidos por $T_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. É óbvio que todos estes números, à excepção de 1, admitem uma representação do tipo que estamos a considerar. Por exemplo, $T_5 = 15 = 1+2+3+4+5 = 7+8$; estas igualdades mostram que a representação não é, em geral, única.

O resultado principal é o seguinte:

Teorema 1
Um número natural pode ser escrito como uma soma de números naturais consecutivos se e só se não for uma potência de 2.

Demonstração
Seja N um número natural que não é potência de 2; então, ele pode ser escrito na forma $N = 2^k(2m+1)$, sendo 2^k a maior potência de 2 que divide N e $2m+1$ o maior factor ímpar de N. Tem-se obviamente que $m \geq 1$ e $k \geq 0$. Consideremos agora a soma

$$\left(2^k - m\right) + \left(2^k - m + 1\right) + \ldots + \left(2^k - m + 2m - 1\right) + \left(2^k - m + 2m\right) (1).$$

Trata-se da soma de termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão 1, pelo que o seu valor é

[1] assim, o conteúdo deste trabalho é acessível, pelo menos em parte, a alunos do 11º ano (Matemática A) e pode ser aproveitado no estudo do Tema III (Sucessões Reais) dessa disciplina. Temos mais dúvidas quanto à sua utilidade para alunos de Matemática B; em todo o caso, a sua apresentação terá de ser adiada para o Tema II do 12º ano.

[2] para evitar trivialidades, só consideraremos somas com duas ou mais parcelas; a generalidade dos alunos considera absurdas somas com uma só parcela.

$$\frac{(2m+1)\left(2^k - m + 2^k - m + 2m\right)}{2} = 2^k(2m+1) = N .$$

Se alguns dos números inteiros que aparecem na soma (1) forem negativos, eles anulam-se com os primeiros números naturais que aparecem na expressão, sobrando sempre pelo menos as duas últimas parcelas. Com efeito, se ficasse apenas a última, resultaria que $2^k + m = N = 2^k(2m+1)$ donde $k = -1$, o que é absurdo. Podemos assim escrever o número N na forma de uma soma de números naturais consecutivos.

Reciprocamente, se uma potência 2^k pudesse ser escrita como soma de m números naturais consecutivos, ter-se-ia $2^k = n + (n+1) + \ldots + (n+m-2) + (n+m-1)$, para um certo natural n. Viria então

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2\left(n + (n+1) + \ldots + (n+m-2) + (n+m-1)\right) = \\ &= m(n+n+m-1) = m(2n+m-1) \end{aligned}.$$

Ora a diferença dos dois factores $2n+m-1$ e m é o número ímpar $2n-1$, pelo que um deles deve ser ímpar; como são ambos diferentes de 1 ($m>1$ e $n>0$, por hipótese, o que mostra logo que $2n+m-1 \neq 1$), segue-se que 2^{k+1} tem um factor ímpar maior que 1, o que é absurdo.

É de observar que este teorema proporciona um método para obter uma representação do tipo em análise. Por exemplo, se $N = 100 = 2^2(2 \times 12 + 1)$ vem, usando as notações anteriores, $k = 2$ e $m = 12$, donde:

$$\begin{aligned} 100 &= \left(2^2 - 12\right) + \left(2^2 - 11\right) + \ldots + (-1) + 0 + 1 + \\ &\quad + \ldots + \left(2^2 + 4\right) + \left(2^2 + 5\right) + \ldots + \left(2^2 + 12\right) = \\ &= \cancel{-8} + \cancel{(-7)} + \ldots + \cancel{(-1)} + \cancel{0} + \cancel{1} + \ldots + \cancel{8} + 9 + \\ &\quad + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = \\ &= 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16. \end{aligned}$$

O método é, frequentemente, muito moroso (experimente-se $N = 1000$...) mas torna-se bastante mais prático se repararmos que estamos a somar números inteiros consecutivos desde $2^k - m$ até $2^k + m$; se o primeiro for positivo, o resultado é imediato, a soma vai de $2^k - m$ até $2^k + m$; se for negativo, a soma que nos interessa começará em $\left|2^k - m\right| + 1$ e terminará em $2^k + m$.

No exemplo anterior, $2^k - m = 2^2 - 12 = -8$, pelo que devemos começar em $\left|2^k - m\right| + 1 = |-8| + 1 = 9$ e terminar em $2^k + m = 2^2 + 12 = 16$. Vem assim que $100 = 9+10+11+12+13+14+15+16$, como anteriormente.

Exercício 1

Escreva 76 como soma de naturais consecutivos.

Exercício 2

Justifique que qualquer número natural que não seja uma potência de 2 é triangular ou é dado pela diferença de dois números triangulares; exemplifique com 76.

Observação 1

O teorema 1 pode ser provado recorrendo aos números triangulares. Para isso, basta estudar a equação diofantina $T_x - T_y = N$, sendo N o número a representar. A demonstração é, no entanto, mais extensa e difícil que a apresentada.

Exercício 3

Escreva um programa de computador que, dado um natural N, apresente uma representação como soma de naturais consecutivos (ou que indique que tal representação é impossível).

Apresentamos em seguida um processo diferente para resolver o problema desta representação, recorrendo a um exemplo detalhado.

Exemplo 1

Escrever 105 como soma de naturais consecutivos.

Pretendemos determinar os naturais m e k de modo que $105 = m+(m+1)+\ldots+(m+k)$.

Pela fórmula que permite calcular a soma de termos consecutivos numa progressão aritmética, vem

$$\frac{m+(m+k)}{2}\big((m+k)-m+1\big)=105$$

ou ainda

$$(2m+k)(k+1)=210 \qquad (2)$$

Parece então razoável considerar os 16 divisores distintos de 210 (como $210=2^1\times3^1\times5^1\times7^1$, 210 tem $(1+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=16$ divisores; ver tabela no fim do exemplo), agrupados em pares cujo produto seja 210 e igualar cada um dos factores do primeiro membro de (2) aos dois elementos de cada par. Porém, um pouco de reflexão mostra que se está a fazer muito trabalho desnecessário: como $(2m+k)-(k+1)=2m-1$ é ímpar, um dos factores $2m+k$ e $k+1$ é ímpar e o outro é par. Além disso, é óbvio que $2m+k>k+1$. Assim, temos apenas de considerar os casos

$$\begin{cases}k+1=1\\2m+k=210\end{cases};\begin{cases}k+1=3\\2m+k=70\end{cases};\begin{cases}k+1=5\\2m+k=42\end{cases};\begin{cases}k+1=7\\2m+k=30\end{cases}$$

$$\begin{cases}2m+k=105\\k+1=2\end{cases};\begin{cases}2m+k=35\\k+1=6\end{cases};\begin{cases}2m+k=21\\k+1=10\end{cases};\begin{cases}2m+k=15\\k+1=14\end{cases}$$

que nos dão as soluções

$$\begin{cases}k=0\\m=105\end{cases};\begin{cases}k=2\\m=34\end{cases};\begin{cases}k=4\\m=19\end{cases};\begin{cases}k=6\\m=12\end{cases}$$

$$\begin{cases}k=1\\m=52\end{cases};\begin{cases}k=5\\m=15\end{cases};\begin{cases}k=9\\m=6\end{cases};\begin{cases}k=13\\m=1\end{cases}$$

Desprezando a primeira solução, obtém-se finalmente

$$\begin{aligned}105&=34+35+36\\&=19+20+21+22+23\\&=12+13+14+15+16+17+18\\&=52+53\\&=15+16+17+18+19+20\\&=6+7+8+9+10+11+12+13+14+15\\&=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14.\end{aligned}$$

A última solução exprime precisamente o facto de 105 ser um número triangular: $105=T_{14}$.

É de observar ainda que o número de soluções poderia ser previsto: na verdade, ao aplicarmos o método, as expressões $k+1$ e $2m+k$ "percorrem" sucessivamente os 8 divisores *ímpares* de 210; como devemos excluir a solução trivial $105=105$, segue-se que há $8-1=7$ soluções distintas.

Divisores de 210	
1	210
2	105
3	70
5	42
6	35
7	30
10	21
14	15

Tabela 1

Exercício 4

Escreva como soma de números naturais consecutivos os números 23, 25, 200, 400 e 1000, pelo processo do exemplo 1, começando por estimar em cada caso o número de soluções.

Exercício 5

Tente demonstrar o teorema 1 pelo processo sugerido no exemplo 1.

Exercício 6

Apresente um método para resolver (em números naturais, é claro) a equação de Pell *degenerada* $x^2-n^2y^2=\alpha$, onde n e α são números naturais dados; exemplifique com $x^2-4y^2=36$.

Exercício 7

Procure obter uma fórmula para estimar o número de parcelas da representação com maior número de parcelas de um número n dado.

3. Uma caracterização dos números primos ímpares

Ao resolver o exercício 4, o leitor terá talvez notado que o número primo *ímpar* 23 tem apenas uma representação, a saber $23=11+12$; como observámos anteriormente, todo o número ímpar maior que 1 admite uma representação deste tipo. Sucede que o problema das representações como soma de números naturais consecutivos leva a uma caracterização dos números primos ímpares. Tem-se, com efeito:

Teorema 2
Um número ímpar maior que 1 é primo se e só se não puder ser escrito como soma de três ou mais números naturais consecutivos.

Demonstração
Comecemos por supor que n é primo, com vista a provar que não pode ser escrito como soma de três ou mais números naturais consecutivos. Vamos provar o contra-recíproco: se n puder ser escrito como soma de três ou mais números naturais consecutivos, então n não é primo.

Seja $n=m+(m+1)+\ldots+(m+t-1)$, sendo m e t números naturais, com $t\geq 2$. Segue-se que $n=t\times m+\frac{t(t-1)}{2}$. Dois casos se podem dar:

(i) t é ímpar.
(ii) t é par.

No primeiro caso, é óbvio que $t-1$ é par e portanto $\frac{t-1}{2}$ é natural. Vem então que $n=t\left(m+\frac{t-1}{2}\right)$ o que mostra que n não é primo, pois tanto t como $m+\frac{t-1}{2}$ são números naturais maiores do que 1.

No segundo caso, escreva-se $t=2k$, sendo k um número natural maior que 1. Vem então que

$$n = 2km + \frac{2k(2k-1)}{2} = k(2m+2k-1)$$

e, tal como anteriormente, n não é primo.

Para provar a implicação no outro sentido ("Se n não se pode escrever como soma de três ou mais números naturais consecutivos, então n é primo"), vamos de novo recorrer ao contra-recíproco, mostrando que se n for composto ímpar, então pode ser escrito como soma de três ou mais números naturais consecutivos.

Seja pois n um número composto ímpar; então pode escrever-se $n = q \times p$, com $q \geq p \geq 3$, p e q números naturais ímpares. Vejamos que n é soma de p números naturais consecutivos, o primeiro dos quais é $q - \frac{p-1}{2}$. Com efeito:

1. $p-1$ é par, logo $q - \frac{p-1}{2}$ é inteiro.
2. $q - \frac{p-1}{2} \geq 1$, pois como $q \geq p$, vem $2q > p$ donde se segue que $2q \geq p+1$ e que $2q - p + 1 \geq p + 2 > 2$; portanto $q - \frac{p-1}{2} \geq 1$.

$$3\left(q - \frac{p-1}{2}\right) + \left(\left(q - \frac{p-1}{2}\right) + 1\right) + \ldots + \left(\left(q - \frac{p-1}{2}\right) + p - 1\right) =$$
$$= \frac{\left(q - \frac{p-1}{2}\right) + \left(\left(q - \frac{p-1}{2}\right) + p - 1\right)}{2} \times p = q \times p = n,$$

o que conclui a prova.

4. Observações finais

Para terminar, e a título de curiosidade, vamos enunciar dois teoremas sobre representação de números naturais por meio de somas de números ímpares consecutivos.

Teorema 3
Qualquer número ímpar composto pode ser representado como soma de números ímpares consecutivos; tal representação é impossível para números primos.

Teorema 4
Um número par pode ser escrito como soma de números ímpares consecutivos se e só for divisível por 4.

As demonstrações são semelhantes às do Teorema 1 e podem ser vistas em [SCY].

Agradecimento
O autor agradece ao "referee" as sugestões apresentadas, que muito contribuíram para a melhoria do texto.

5. Referências

[BA] Beiler, A. H. (1964) - *Recreations in the Theory of Numbers*, New York, Dover Publications Inc.

[NZM] Niven, I. , Zuckerman, H. e Montgomery, H. (1991) - *An Introduction to the Theory of Numbers*, New York, John Wiley & Sons.

[Ol] Oliveira, G. N. (1981) - *Resolução de Equações em Números Inteiros*, Coimbra (notas de um curso integrado na Escola de Verão organizada pela Sociedade Portuguesa de Matemática).

[PA] Carvalho e Silva, J. (Coord.) et al. (s/d) - *Matemática A 11º ano*, Lisboa, Ministério da Educação-Departamento do Ensino Secundário (disponível em www.mat-no-sec-org).

[PB] Carvalho e Silva, J. (Coord.) et al. (s/d) - *Matemática B 12º ano*, Lisboa, Ministério da Educação-Departamento do Ensino Secundário (disponível em www.mat-no-sec-org).

[SCY] Shklarsky, D. O., Chentzov, N. N. e Yaglom, I.M. (1993) - *The USSR Olympiad Problem Book*, New York, Dover Publications Inc.

[WD] Wells, D. (1987) - *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*, London, Penguin Books Ltd.