ZETA DE DOIS

Qual é a soma dos inversos dos quadrados perfeitos?

João Filipe Queiró
Universidade de Coimbra
jfqueiro@mat.uc.pt

1. INTRODUÇÃO

Um dos assuntos mais interessantes que são estudados no 1.º ano do Ensino Superior são as séries. A descoberta das somas com um número infinito de parcelas é sempre um momento de fascínio. Umas somas dão um resultado – são as séries *convergentes* –, outras não – são as séries *divergentes*.

A definição de série convergente é muito natural: se queremos que a soma

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

tenha um resultado, o mais óbvio é exigir que a sucessão das *somas parciais*

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1 \\ S_2 &= u_1 + u_2 \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

tenha limite, que será por definição a *soma* da série dada.

O estudo dos limites de sucessões surge portanto como um pré-requisito para o estudo da convergência de séries. Historicamente não foi assim. As séries são um objecto matemático que surgiu antes das sucessões, pela sua aparição natural em questões de Análise, e esta precedência atravessou todo o século XVIII.

A distinção entre séries convergentes e séries divergentes leva a um estudo pormenorizado de *critérios* de convergência, com aplicação a variados tipos de séries. Há muitos critérios, alguns com enunciados subtis. Durante o seu estudo, apercebemo-nos de que investigar se uma série é ou não convergente é uma questão distinta da de calcular a sua soma. Na verdade, há numerosos exemplos de séries que conseguimos provar que são convergentes sem que saibamos achar a sua soma.

Dir-se-á que este é um falso problema: se a série $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ for convergente, o cálculo de alguns termos da sucessão S_n das somas parciais dará uma ideia do valor da soma, ainda que esse valor seja aproximado. Isto é verdade, ainda que se ponha o problema da *velocidade da convergência*: dadas duas séries convergentes, pode ser enorme a diferença entre o número de termos de S_n que temos de considerar nas duas para obter, digamos, três casas decimais estáveis.

Por exemplo, no caso da série

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

basta somar sete parcelas para obter

$$2{,}71805\ldots$$

e as primeiras três casas decimais já estabilizaram. A soma da série é

$$2{,}7182818284\ldots$$

um número a que se costuma chamar e.

Compare-se esta situação com a da série

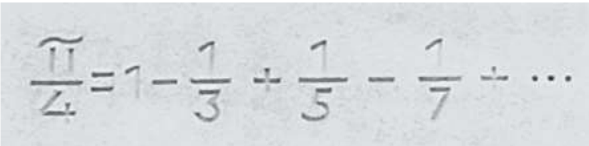
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots,$$

a chamada *série harmónica alternada*. É simples mostrar que é convergente. Mas, ao somar 1000 parcelas, só se consegue estabilizar as casas decimais 0,69. A soma da série é

$$0{,}6931471806\ldots$$

São muito interessantes os casos em que, para uma série dada que se sabe que é convergente, se consegue achar um valor exacto para a sua soma, relacionando-a com alguma função ou alguma constante conhecida. Por exemplo, a soma da série harmónica alternada é $\log(2)$.

Outro exemplo curioso em que a convergência é muito lenta surge nos baixos-relevos da entrada do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra:



2. AS SÉRIES DE DIRICHLET

Neste artigo vamos olhar para as séries da forma

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\cdots,$$

às vezes chamadas *séries de Dirichlet*. Aqui α designa um número real. Se $\alpha=1$ obtemos a *série harmónica*, que facilmente se vê que é divergente. O mesmo acontece se $\alpha<1$. Mas para $\alpha>1$ pode ver-se de várias maneiras que a série converge. Qual será a sua soma?

O interesse despertado por este tipo de séries levou Riemann, no século XIX, a definir uma função, denotada por ζ, precisamente por essa soma:

$$\zeta(\alpha)=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\cdots$$

(Esta função define-se mesmo para valores complexos de α, o que conduz a questões muito interessantes, mas não vamos entrar nisso aqui.)

Nas décadas de 30 e 40 do século XVIII, Leonhard Euler (1707-1783) dedicou vários trabalhos ao cálculo de $\zeta(\alpha)$ para valores inteiros pares de α. No caso de $\alpha=2$ o interesse pelo assunto era grande e já vinha do século anterior. A série dos inversos dos quadrados

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

é um objecto natural de estudo. A sua convergência é lenta. Antes de Euler, Daniel Bernoulli deu $8/5$ como valor aproximado para a soma e Goldbach afirmou que a soma está entre 1,64 e 1,66.

Euler começou por calcular valores aproximados para a soma, usando um método engenhoso em 1731 para chegar à aproximação 1,644934. Em 1732, com um novo método (a hoje chamada *fórmula de Euler-Maclaurin*), chegou a 1,64493406684822643647.

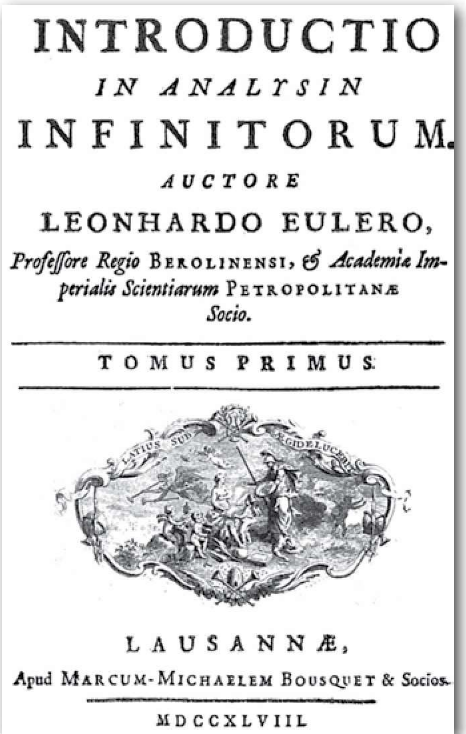
3. A SOMA EXACTA DA SÉRIE

Em 1734, Euler escreveu a Daniel Bernoulli comunicando-lhe que tinha descoberto o valor exacto da soma da série:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Após ter apresentado o resultado numa comunicação, veio a publicá-lo em 1740 [5] e voltou ao assunto por várias vezes mais tarde (ver, por exemplo, [2]). Esta foi a primeira descoberta de Euler que lhe trouxe reputação internacional.

O que vamos fazer é expor o argumento de Euler tal como aparece no livro *Introductio in analysin infinitorum* [6], de 1748, do qual se pode dizer que marca o início da análise matemática como estudo de funções, em vez de curvas.



INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & *Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ *Socio*.

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLVIII.

No Capítulo 9, Euler começa por tratar a questão da factorização de polinómios, relacionando-a de forma óbvia com as raízes desses polinómios: um número p/q é raiz de um polinómio $f(z)$ se e só se $p - qz$ for factor de $f(z)$. Depois de algumas considerações gerais, que incluem o caso de raízes imaginárias, Euler exibe factorizações explícitas de alguns polinómios especiais.

Depois, sem qualquer transição, afirma: "Esta resolução em factores pode também aplicar-se às séries infinitas." Começa pela série da exponencial e faz vários cálculos em que figura "um número infinito i". Exemplo de uma das suas fórmulas:

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i .$$

Factoriza a função $e^z - 1$ e a seguir faz o mesmo para as funções seno e co-seno e seno e co-seno hiperbólicos, usando a sua relação com a função exponencial. Por exemplo, como os zeros da função seno são $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \ldots$, tomando $p = 1$ e $q = \pm 1/(k\pi)$ para os sucessivos valores naturais de k, deverá ter-se

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z = z \left(1 - \frac{z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{2\pi}\right) \times \\ \times \left(1 + \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{3\pi}\right) \cdots \end{aligned}$$

onde no segundo membro temos um produto infinito. Daqui tira-se

$$\operatorname{sen} z = z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{16\pi^2}\right) \cdots$$

No capítulo 10, Euler aplica as factorizações encontradas ao cálculo das somas de algumas séries. Começa por observar que se se tiver uma igualdade do tipo

$$\begin{aligned} 1 + A\xi + B\xi^2 + C\xi^3 + D\xi^4 + \cdots = \\ = (1 + \alpha\xi)(1 + \beta\xi)(1 + \gamma\xi)(1 + \delta\xi) \cdots \end{aligned}$$

deverá ter-se

$$A = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots .$$

Isto é óbvio no caso de somas e produtos finitos, mas Euler afirma que se mantém verdadeiro no caso de somas e produtos infinitos.

Igualando agora a série do seno

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

ao produto infinito visto, chegamos a

$$\begin{aligned} 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots = \\ = \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{16\pi^2}\right) \cdots \end{aligned}$$

ou, pondo $z^2 = \xi$,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\xi}{3!} + \frac{\xi^2}{5!} - \frac{\xi^3}{7!} + \cdots = \\ = \left(1 - \frac{\xi}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\xi}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\xi}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\xi}{16\pi^2}\right) \cdots \end{aligned}$$

Usando a observação acima sobre coeficientes de séries chegamos imediatamente a

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots .$$

4. OBSERVAÇÕES ADICIONAIS

O problema com a engenhosa demonstração de Euler é que os processos infinitários em meados do século XVIII não estavam ainda bem definidos e fundamentados. Euler usa manipulações formais – e mesmo números infinitos e infinitamente pequenos – como se estivesse a trabalhar com somas, produtos e números finitos. Como em geral acontece com matemáticos do mais alto nível, vale a pena estudar os raciocínios de Euler, mesmo que não resistam à exigência dos dias de hoje, porque em geral podem ser transformados em demonstrações completamente rigorosas. O leitor interessado nas obras de Euler tem à sua disposição o excelente arquivo [7].

A fundamentação dos processos infinitários só veio mais tarde. A este propósito, é interessante recordar que a primeira definição rigorosa de convergência de uma série foi apresentada por um português, José Anastácio da Cunha, em [3]. Isto foi observado pela primeira vez em 1940 por Vicente Gonçalves [8]. Duas referências mais recentes são [10] e [11].

Com o mesmo tipo de técnica Euler obtém as somas das séries dos inversos das potências de expoente par, escrevendo explicitamente as primeiras:

$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90} .$$

$$\zeta(6) = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945} .$$

$$\zeta(8) = 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \cdots = \frac{\pi^8}{9450} .$$

$$\zeta(10) = 1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \cdots = \frac{\pi^{10}}{93555}.$$
$$\vdots$$

E a seguir reescreve os coeficientes das potências de π de uma forma que, em notação moderna, permite escrever as somas assim:

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1}2^{2k-1}B_{2k}}{(2k)!}\,\pi^{2k}$$

onde os B_{2k} são os *números de Bernoulli*:

$$B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},$$
$$B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66},\ \ldots$$

Hoje são conhecidas outras demonstrações desta igualdade. Uma muito recente, redigida por um estudante português, pode ser vista em [12]. É totalmente elementar e próxima do estilo matemático de Euler.

O passo decisivo no raciocínio de Euler é a expressão do seno como um produto infinito. Só no século XIX foi integralmente justificada. Uma prova elementar pode ser vista em [4].

E quanto aos expoentes ímpares? Embora Euler tenha feito algumas observações sobre o caso, nunca conseguiu obter uma expressão para a soma dessas séries. Nem ele nem ninguém. De facto, extraordinariamente, só há cerca de 40 anos se conseguiu provar que $\zeta(3)$, com valor aproximado 1,202056903..., é um número irracional (ver [1], [9]).

REFERÊNCIAS

[1] Roger Apéry, *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$, Astérisque 61 (1979), 11-13.

[2] Raymond Ayoub, "Euler and the zeta function", *The American Mathematical Monthly* 81 (1974), 1067-1086.

[3] José Anastácio da Cunha, *Principios Mathematicos*, Lisboa (1790). Reprodução facsimilada, Univ. Coimbra (1987).

[4] W. F. Eberlein, "On Euler's infinite product for the sine", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 58 (1977), 147-151.

[5] Leonhard Euler, *De summis serierum reciprocarum*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7 (1740), 123-134.

[6] Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne, 1748.

[7] The Euler Archive, *http://eulerarchive.maa.org/*

[8] J. Vicente Gonçalves, *Análise do Livro VIIII dos Principios Mathematicos de José Anastácio da Cunha*, Actas do Congresso do Mundo Português XII (1940), 123-140.

[9] Alfred van der Poorten, "A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$. An informal report", *The Mathematical Intelligencer* 1 (1979), 195-203.

[10] J. F. Queiró, "José Anastácio da Cunha: a forgotten forerunner", *The Mathematical Intelligencer* 10 (1988), 38-43.

[11] J. F. Queiró, "José Anastácio da Cunha: um matemático a recordar, 200 anos depois", *Matemática Universitária* (Soc. Brasileira de Matemática), 14 (1992), 5-27. Reproduzido em Boletim da SPM n.º 29 (1994), 1-18.

[12] Pedro Ribeiro, "Another proof of the famous formula for the zeta function at positive even integers", *Amer. Math. Monthly* 125 (2018), 839-841.