SOBRE A IMPOSSIBILIDADE DE CONSTRUIR UM TRIÂNGULO, DADOS OS COMPRIMENTOS DAS BISSETRIZES INTERNAS

A. Caminha[a] e A. Maia[b]

Universidade Federal do Ceará[a,b]

caminha@mat.ufc.br[a] e alberto.duarte@mat.ufc.br[b]

1. INTRODUÇÃO

Um dos pontos altos de todo curso de Estruturas Algébricas é a solução dos problemas clássicos gregos de construção com régua e compasso, quais sejam, a demonstração das impossibilidades da quadratura de um círculo, da duplicação de um cubo e da trissecção de um ângulo genérico. Usualmente, isto é feito por contradição: por um lado, mostra-se (cf. [6], [7] ou [8], por exemplo) que um número real $\alpha > 0$ é construtível se, e só se, o grau da extensão de corpos $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ for uma potência de 2; por outro, para o primeiro problema a contradição surge da transcendência de π, enquanto para os outros dois problemas ela decorre do facto de que os polinómios minimais de $\sqrt[3]{2}$ e de $\cos\frac{\pi}{9}$ têm grau 3.

Nesta curta nota, aplicamos o arcabouço de ideias envolvido na demonstração dos problemas gregos para apresentar uma prova simples para o facto de que é impossível, utilizando um compasso e uma régua sem marcas, construir um triângulo, conhecidos os comprimentos das suas bissetrizes internas, mesmo que o triângulo seja isósceles.

Creditávamos o problema acima ao folclore matemático. Contudo, após a apresentação desta nota a alguns colegas, fomos informados por Samuel B. Feitosa de que ele parece ter sido inicialmente proposto por H. Brocard, em 1875, e respondido (negativamente) por F. Neiss (veja [10]), em 1937, mas não fomos capazes de acessar a sua demonstração. De toda forma, acreditamos que os argumentos aqui reunidos, pela sua simplicidade, compõem uma bela aplicação da teoria, a qual vale a pena ser registada.

De maneira mais precisa, demonstramos neste artigo o seguinte resultado.

Teorema 1.1. *De um triângulo ABC, isósceles de base BC, conhecemos segmentos de comprimentos p e q, respetivamente iguais àqueles das bissetrizes internas relativas aos vértices B e A. Se q/p for um número real transcendente, então não é possível construir ABC com um compasso e uma régua sem marcas.*

Recordamos que um número real é dito *algébrico* se for raiz de um polinómio não constante e de coeficientes inteiros; do contrário, tal número é denominado *transcendente*. Não é difícil provar (veja o capítulo 1 de [4] ou o exercício 1.4.12 de [1], por exemplo) que o conjunto dos números reais algébricos é enumerável, isto é, pode ser colocado em correspondência biunívoca com o conjunto dos naturais. Uma vez que todo o intervalo aberto da reta real é não enumerável, percebemos imediatamente que o teorema acima estabelece *genericamente* a não construtibilidade de triângulos isósceles.

Por fim, observamos que, dados arbitrariamente três segmentos de reta, sempre existe um triângulo cujas bissetrizes internas têm comprimentos iguais aos comprimentos de tais segmentos; ademais, tal triângulo é único a menos de congruência. Esse resultado foi demonstrado somente em 1994, por P. Mironescu e L. Panaitopol (veja [9]), por meio de um belíssimo argumento envolvendo o Teorema do Ponto Fixo de Banach para contrações.

Apresentamos uma prova simples para o facto de que, genericamente, é impossível utilizar um compasso e uma régua sem marcas para construir um triângulo, dados os comprimentos das suas bissetrizes internas, mesmo no caso em que o triângulo seja isósceles.

2. ALGEBRIZANDO CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Por completude, ao longo desta secção recordamos brevemente a formalização algébrica das construções com uma régua não graduada e compasso, seguindo essencialmente [6] e [7].

Assumimos que, com uma régua não graduada e um compasso, podemos traçar:

(i) a reta que passa por dois pontos dados;

(ii) o círculo com centro num ponto dado e passando por outro ponto também dado.

Assumimos também que todas as construções são realizadas no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Nesse sentido, dado um subconjunto S de $\mathbb{R}^2$ que contenha pelo menos dois pontos, dizemos que:

(i) uma reta é *imediatamente construtível a partir de S* se contiver, pelo menos, dois pontos distintos de S;

(ii) um círculo é *imediatamente construtível a partir de S* se o seu centro e um dos seus pontos pertencerem a S.

Assim, dizemos que um ponto A é *imediatamente construtível a partir de S* se A for a interseção entre duas retas, entre uma reta e um círculo ou entre dois círculos imediatamente construtíveis a partir de S. Portanto, se A é imediatamente construtível a partir de S, então as suas coordenadas cartesianas satisfazem um sistema de equações composto por equações de retas ou círculos e, assim sendo, tais coordenadas são raízes de equações polinomiais de graus 1 ou 2, tendo por coeficientes expressões algébricas envolvendo somente coordenadas de pontos de S.

A partir de agora, sejam $S_0 = \{(0,0),(1,0)\}$ e, para $i \geq 1$, seja S_i o conjunto dos pontos imediatamente construtíveis a partir de S_{i-1}. Definimos o conjunto $\mathcal{C}$ dos *pontos construtíveis* de $\mathbb{R}^2$ como

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i \geq 0} S_i.$$

Evidentemente, definimos de maneira análoga o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ construtíveis a partir de um subconjunto S qualquer de $\mathbb{R}^2$.

Não é difícil mostrar que um ponto $A(a,b)$ é construtível se, e somente se, os pontos $(a,0)$ e $(b,0)$ o forem. Isto posto, temos a seguinte

Definição 2.1. Um número real x é construtível se x for a abscissa de um ponto construtível.

A partir das construções elementares listadas anteriormente, já na Antiguidade Clássica os gregos sabiam realizar, por exemplo, as seguintes construções:

(i) adicionar e subtrair segmentos;

(ii) dividir um segmento dado em n segmentos congruentes, para $n \in \mathbb{N}$;

(iii) dada uma unidade de medida e segmentos de comprimentos a e b, construir segmentos de comprimentos ab e a/b.

Portanto, o conjunto dos números construtíveis é um subcorpo de $\mathbb{R}$ contendo $\mathbb{Q}$.

Pelo que fizemos até aqui, um ponto A é construtível se existirem pontos A_1, A_2, A_3, ..., A_r, com $A_1 = (a_1,b_1) = (0,0)$, $A_2 = (a_2,b_2) = (0,1)$, $A_3 = (a_3,b_3)$, ..., $A_r = (a_r,b_r) = A$ e tais que cada um dos A_i, para $3 \leq i \leq r$, pode ser obtido por meio de construções elementares que envolvam os pontos anteriores a ele na sequência.

Os próximos dois resultados evidenciam a importância desses conceitos preliminares. A fim de que o leitor os aprecie melhor, cumpre recordar (cf. os capítulos 5 de [6] ou [8], por exemplo) alguns factos simples sobre extensões de corpos.

Se $\mathbb{K}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, denotamos por $\mathbb{K}[\alpha]$ (respetivamente $\mathbb{K}(\alpha)$) o menor subanel (respetivamente subcorpo) de $\mathbb{R}$ contendo $\mathbb{K}$ e α. Assim, $\mathbb{K}[\alpha]$ é o conjunto de todos os números reais da forma

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0, \qquad (2.1)$$

com $n \in \mathbb{Z}_+$ e $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, ao passo que $\mathbb{K}(\alpha)$ é o conjunto formado pelos quocientes β/γ, com $\beta, \gamma \in \mathbb{K}[\alpha]$, sendo $\gamma \neq 0$.

Se α é *algébrico sobre* $\mathbb{K}$, isto é, se α é raiz de um polinómio não nulo de coeficientes em $\mathbb{K}$, é possível mostrar que o conjunto dos polinómios em $\mathbb{K}[X]$ que anulam α é formado pelos múltiplos de um único polinómio mónico e irredutível $p_{\alpha|\mathbb{K}} \in \mathbb{K}[X]$, dito o *polinómio minimal* de α sobre $\mathbb{K}$. Sendo esse o caso, diz-se que a extensão de corpos $\mathbb{K}(\alpha)|\mathbb{K}$ é *finita*, e define-se o seu *grau*, denotado $[\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{K}]$, como a dimensão do $\mathbb{K}-$ espaço vetorial $\mathbb{K}(\alpha)$; por fim, prova-se que $[\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{K}]$ é igual ao grau do polinómio $p_{\alpha|\mathbb{K}}$.

Lemma 2.1. *Seja $\mathbb{K}$ um subcorpo de $\mathbb{R}$ que contém as coordenadas de uma coleção S de pontos construtíveis de $\mathbb{R}^2$, todos com coordenadas em $\mathbb{K}$. Se $A = (\alpha,0)$ é imediatamente construtível a partir de S, então $[\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{K}] \leq 2$.*

Demonstração (esboço). Conforme observamos anteriormente, o ponto $A = (\alpha,0)$ é interseção de duas retas, de uma reta e um círculo ou de dois círculos, determinados a partir de pontos de S. Também por uma observação anterior, α é raiz de um polinómio $f \in \mathbb{K}[X]$, de grau 1 ou 2; então, sendo $p_{\alpha|\mathbb{K}}$ o polinómio minimal de α sobre $\mathbb{K}$, temos

$$[\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{K}] = \partial p_{\alpha|\mathbb{K}} \leq \partial f \leq 2. \qquad \square$$

Tendo em vista o lema anterior, a multiplicatividade de graus para extensões finitas de corpos fornece o seguinte resultado fundamental.

Teorema 2.3. Seja $\mathbb{K}$ um subcorpo de $\mathbb{R}$ que contém as coordenadas de uma coleção S de pontos construtíveis de $\mathbb{R}^2$, todos com coordenadas em $\mathbb{K}$. Se $A = (\alpha,0)$ é construtível a partir de S, então $[\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{K}]$ é uma potência de 2.

Demonstração (esboço). A partir das hipóteses, não é difícil mostrar que existem $\alpha_0 = 1$, α_1, α_2, ..., $\alpha_n = \alpha$ tais que, para $1 \leq i \leq n$, o número α_i é imediatamente construtível a partir de $\mathbb{K}(\alpha_{i-1})$. Então, a aludida multiplicatividade de graus, juntamente com o lema anterior, fornece

$$[\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{K}] = \prod_{i=1}^{n} [\mathbb{K}(\alpha_i):\mathbb{K}(\alpha_{i-1})] = 2^m,$$

para algum inteiro m tal que $0 \leq m \leq n$. $\square$

De posse da discussão acima, podemos antecipar, em linhas gerais, os argumentos que levarão à demonstração do Teorema 1.1 analisando brevemente o problema da trissecção de um ângulo (para mais detalhes, veja novamente os capítulos 5 de [6] ou [8]): se fosse possível construir com um compasso e uma régua sem marcas um ângulo de 20º (ou, de outra forma, se fosse possível trissectar um ângulo de 60º), pode-se mostrar que o número cos 20º seria construtível a partir de $\mathbb{Q}$. Contudo, um pouco de Trigonometria fornece a igualdade

$$8\cos^3 20^\circ - 6\cos 20^\circ - 1 = 0,$$

de sorte que o polinómio minimal de cos 20º sobre $\mathbb{Q}$ é (o polinómio irredutível) $\frac{1}{8}(8X^3 - 6X - 1)$. Assim,

$$[\mathbb{Q}(\cos 20^\circ : \mathbb{Q}] = 3,$$

que não é uma potência de 2, de sorte que chegamos a uma contradição.

3. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.1

3.1. A parte geométrica

Consideremos um triângulo ABC, isósceles de base BC, e denotamos por AM e BP duas das suas bissetrizes internas (veja a figura 1).

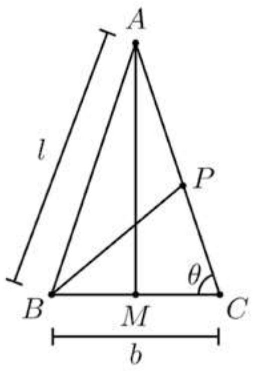

Figura 1. Um triângulo isósceles e duas das suas bissetrizes internas.

Assumimos que os comprimentos p de BP e q de AM são conhecidos, e fazemos $AB = AC = l$ e $BC = b$. Uma vez que AM também é altura e mediana de ABC, temos $\cos\theta = \frac{b}{2l}$; também, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ACM, obtemos $l^2 - \frac{b^2}{4} = q^2$ ou, o que é o mesmo,

$$(2l+b)(2l-b) = 4q^2. \tag{3.1}$$

Com respeito à bissetriz interna BP, o Teorema da Bissetriz Interna (cf. capítulo 4 de [3], por exemplo) fornece $\frac{AP}{CP} = \frac{AB}{BC}$ ou, denotando $CP = x$, $\frac{l-x}{x} = \frac{l}{b}$. Resolvendo para x, temos $CP = x = \frac{bl}{b+l}$. Então, aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo BPC, vem que

$$\begin{aligned} p^2 &= b^2 + x^2 - 2bx\cos\theta \\ &= b^2 + \left(\frac{bl}{b+l}\right)^2 - 2b\left(\frac{bl}{b+l}\right) \cdot \frac{b}{2l} \\ &= \frac{b^2 l(b+2l)}{(b+l)^2}. \end{aligned}$$

Esta última relação, juntamente com (3.1), dá facilmente

$$\frac{b^2 l}{2l-b} = \frac{p^2(b+l)^2}{4q^2}.$$

3.2. A parte algébrica

Multiplicando a última igualdade acima em × e utilizando um pouco de álgebra elementar, obtemos

$$2p^2l^3 + 3p^2bl^2 - 4q^2b^2l - p^2b^3 = 0;$$

dividindo ambos os membros por b^3, podemos escrever

$$2p^2\left(\frac{l}{b}\right)^3 + 3p^2\left(\frac{l}{b}\right)^2 - 4q^2\left(\frac{l}{b}\right) - p^2 = 0.$$

A fim de simplificar a notação nos argumentos subsequentes, podemos supor $p = 1$. Realmente, pensando em p e q como os comprimentos de dois segmentos dados no papel (e, portanto, transportáveis com o auxílio da régua e do compasso), podemos impor o comprimento p como unidade de medida ao longo dos eixos do sistema cartesiano fixado.

Desse modo, concluímos que $\frac{l}{b}$ é uma raiz do polinómio de terceiro grau

$$f(X) = 2X^3 + 3X^2 - 4q^2X - 1. \tag{3.2}$$

Agora, estabeleçamos a irredutibilidade de f em $\mathbb{Q}(q)[X]$, para todo o número real $q > 0$ transcendente.

Sendo q transcendente, pode-se mostrar que $\mathbb{Q}[q]$ é essencialmente idêntico a um anel de polinómios $\mathbb{Q}[Y]$; formalmente, diz-se que $\mathbb{Q}[q]$ e $\mathbb{Q}[Y]$ são *isomorfos*, o que é denotado escrevendo-se $\mathbb{Q}[q] \simeq \mathbb{Q}[Y]$. Então, $\mathbb{Q}[q] \neq \mathbb{Q}(q)$, mas, por outro lado, $\mathbb{Q}[q]$ é um domínio de fatoração única. Dessa forma, um teorema clássico de Gauss (conhecido como o Lema de Gauss – veja o Teorema 4.3.1 de [8] e a discussão subsequente, por exemplo) garante que f será irredutível em $\mathbb{Q}(q)[X]$ se o for em $\mathbb{Q}[q][X]$.

Por sua vez, se tal não sucedesse, f teria uma raiz $\alpha \in \mathbb{Q}(q)$, e existiriam $g(X), h(X) \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ tais que $\alpha = \frac{g(q)}{h(q)}$. Nesse caso, o critério de pesquisa de raízes de f pertencentes ao corpo de frações do domínio de fatoração única $\mathbb{Q}[q]$ (veja, por exemplo, a Secção 2.2 de [5] ou o problema 2.9.1 de [2]), juntamente com (3.2), permite concluir que $g(q) \mid 1$ e $h(q) \mid 2$ em $\mathbb{Q}[q]$. Mas, como $\mathbb{Q}[q] \simeq \mathbb{Q}[Y]$, isso garante que $\alpha \in \mathbb{Q}$. Então, novamente por (3.2), temos

$$q^2 = \frac{2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 1}{4\alpha} \in \mathbb{Q}, \tag{3.3}$$

um absurdo.

Por fim, argumentando por contradição, suponha que seja possível utilizar um compasso e uma régua sem marcas para construir o triângulo ABC, conhecidos os comprimentos $p = 1$ e q, com $q > 0$ transcendente. Recordando a discussão da secção anterior, isto significa que existe uma sequência finita de construções elementares que nos permite obter o comprimento $\frac{lp}{b} = \frac{l}{b}$ (uma vez que estamos assumindo $p = 1$). De outra maneira, $\frac{l}{b}$ é construtível a partir de $\mathbb{Q}(p, q) = \mathbb{Q}(q)$, de forma que, pelo Teorema 2.3, o grau $[\mathbb{Q}(q)(l/b) : \mathbb{Q}(q)]$ deve ser uma potência de 2. Contudo, uma vez que f é irredutível em $\mathbb{Q}(q)[X]$, temos

$$[\mathbb{Q}(q)(l/b) : \mathbb{Q}(q)] = \partial p_{l/b|\mathbb{Q}(q)} = \partial f = 3,$$

uma contradição.

Observação 3.1. *Defina $\mathbb{Z}[q]$ como o conjunto das expressões como em (2.1), com $n \in \mathbb{N}$ e $a_i \in \mathbb{Z}$ para $0 \leq i \leq n$. A demonstração do Teorema 1.1 ainda funciona, sem alterações, se $q > 0$ for tal que $\mathbb{Z}[q]$ é um domínio de fatoração única e [consoante (3.3)] q^2 não é racional. Uma vez que não nos foi possível exibir exemplos simples dessa situação com $q > 0$ algébrico, optámos por nos restringir ao caso em que q é transcendente. De todo o modo, uma análise mais detalhada do caso em que q é algébrico levaria-nos rapidamente ao reino da Teoria Algébrica dos Números e tornaria a nossa exposição muitíssimo menos elementar.*

REFERÊNCIAS

[1] S. Abbott. *Understanding Analysis*, segunda edição. Nova Iorque, Springer, 2016.

[2] R. Ash. *Basic Abstract Algebra*, primeira edição. Mineola, Dover, 2007.

[3] A. Caminha. *An Excursion Through Elementary Mathematics, Volume II: Euclidean Geometry*. Cham, Springer, 2018.

[4] D. G. de Figueiredo. *Números Irracionais e Transcendentes*, terceira edição. Rio de Janeiro, IMPA, 2011.

[5] A. Garcia e Y. Lequain. *Elementos de Álgebra*, sexta edição. Projeto Euclides, IMPA, 2015.

[6] A. Golçalves. *Introdução à Álgebra*, quinta edição. Rio de Janeiro, IMPA, 2015.

[7] C. R. Hadlock. *Field Theory and its Classical Problems*. Washington, MAA, 1978.

[8] I. N. Herstein. *Topics in Algebra*. New York, John Wiley & Sons, 1975.

[9] P. Minorescu e L. Panaitopol. "The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths". *Amer. Math. Monthly* 101 (1994), 58-60.

[10] F. Neiss. "Über die Unmöglichkeit der Konstruktion eines Dreiecks aus seinen drei Winkelhalbierenden". *J. Reine Angew. Math.* 177 (1937), 129-133.

Os autores gostariam de agradecer ao revisor pelas valiosas observações.

SOBRE OS AUTORES

António Caminha é professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, em Fortaleza, Brasil, desde 2004. Integra o grupo de Geometria Diferencial, concentrando as suas investigações em temas ligados a estruturas geométricas em variedades riemannianas e lorentzianas. Publicou vários artigos de pesquisa e orientou diversos alunos de mestrado e doutorado. É autor da coleção *An Excursion Through Elementary Mathematics*, publicada pela Springer Nature e dedicada às Olimpíadas de Matemática.

Alberto Maia é professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, em Fortaleza, Brasil, desde 2007. Integra o grupo de Álgebra, concentrando as suas investigações em temas ligados à Álgebra Comutativa e à Geometria de Curvas Algébricas.