



## POESIA PERMUTATIVA: MATEMÁTICA DA SEXTINA

POUL G. HJORTH

UNIVERSIDADE TÉCNICA DA DINAMARCA

[pghj@dtu.dk](mailto:pghj@dtu.dk)

TRADUÇÃO DE NATÁLIA BEBIANO, Universidade de Coimbra, [bebiano@mat.uc.pt](mailto:bebiano@mat.uc.pt)

**M**atemática e poesia são frequentemente vistas como expressões complementares do intelecto humano. Há, no entanto, casos em que a poesia se submete voluntariamente a regras matemáticas e a matemática envolve-a com a sua beleza singular. Neste artigo, as teorias do caos e dos grupos de permutações intervêm na análise de uma forma medieval de poesia muito difícil do ponto de vista formal.

## 1. POESIA SINTAXIAL

Consideremos as duas primeiras estrofes de um poema [2] do grande poeta Luís Vaz de Camões (1524-1580).

*Foge-me pouco a pouco a curta vida  
(se por caso é verdade que inda vivo);  
vai-se-me o breve tempo d'ante os olhos;  
choro pelo passado e quando falo,  
se me passam os dias passo a passo,  
vai-se-me, enfim, a idade e fica a pena.*

*Que maneira tão áspera de pena!  
Que nunca a hora viu tão longa vida  
em que possa do mal mover-se um passo.  
Que mais me monta ser morto que vivo?  
Para que choro, enfim? Para que falo,  
se lograr-me não pude de meus olhos?*

Além de palavras “saltitantes”, podemos observar duas coisas: (1) não há um padrão particular de rima, e (2) as palavras finais dos seis versos da primeira estrofe ocorrem de novo como palavras finais na segunda estrofe, mas numa ordem diferente da da primeira estrofe.

Considerando apenas as palavras finais de cada verso, a sequência de palavras (*vida, vivo, olhos, falo, passo, pena*) foi permutada originando a sequência (*pena, vida, passo, vivo,*

*falo, olhos*), ou simbolicamente 1, 2, 3, 4, 5, 6 deu origem a 6, 1, 5, 2, 4, 3.

Nas estrofes seguintes do poema, a mesma permutação é usada novamente, passando o 2 a 3, o 3 a 4, o 4 a 5, e o 5 a 6. Se se aplicasse a permutação às palavras finais da sexta estrofe, chegar-se-ia à mesma sequência de palavras finais da estrofe 1. Assim, a permutação é um ciclo de ordem seis do grupo de permutação  $S_6$ .

Este padrão é um exemplo de uma forma particular de poesia conhecida como *sextina* [5, 8]. Uma sextina tem 6 estrofes cada uma com 6 versos. A regra acima para a permutação das palavras finais de cada verso deve ser seguida em cada nova estrofe até à sexta<sup>1</sup>.

Matematicamente, a permutação utilizada é descrita de forma compacta com a notação de ciclo

$$(1, 2, 4, 5, 3, 6).$$

Uma forma mais visual e muitas vezes usada para representar a permutação é a mnemónica que a figura 1 ilustra.

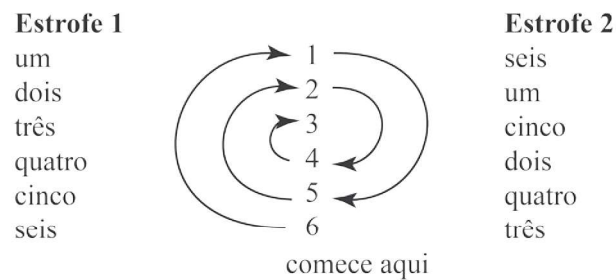


Figura 1. Mostrando como encontrar a ordem das palavras finais ao passar para uma nova estrofe. Aqui “um” até “seis” representam as palavras finais usadas na estrofe, e os números de 1 a 6 representam a posição dentro desta. A ilustração espiral encontrada em vários manuais de poesia, por exemplo [5, 8], parece um pouco confusa, pois não apresenta de facto a permutação. O ponto importante é que o arranjo na estrofe subsequente encontra-se seguindo a espiral, começando em 6.

<sup>1</sup> Além das seis estrofes, o formato sextina termina com a chamada coda: uma sétima estrofe que contém apenas três versos. Todas as palavras finais devem ser usadas dentro da coda, duas em cada verso. Algumas versões da sextina exigem uma ordem estrita para o posicionamento das palavras finais dentro da sétima estrofe:

... 5    ... 2  
... 3    ... 4  
... 1    ... 6

É como um passo final da dança num tempo duas vezes mais rápido. A coda é uma parte crucial da sextina, mas porque não é diretamente usada na permutação das palavras de estrofe para estrofe vamos ignorar a coda nos argumentos matemáticos.

Schimmel [6] descreve a permutação da sextina como:

“... uma *dança* [7], com cada estrofe representando uma sequência de passos. Cada estrofe é baseada na que diretamente a precede, segundo a regra: última, primeira, penúltima, segunda, antepenúltima, terceira.”

A figura 2 ilustra uma visão mais dinâmica do processo.

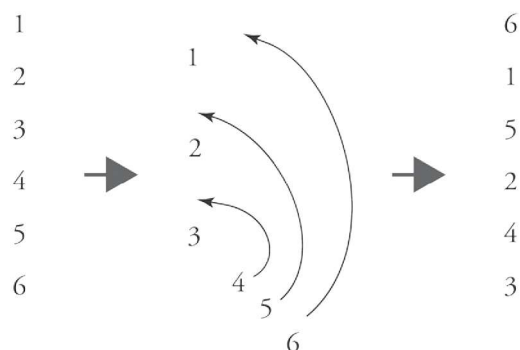


Figura 2. Uma representação da “dança” da sextina. As três primeiras posições movem-se para baixo e abrem, e as restantes três posições, por ordem inversa, sobem para os espaços abertos entre as três primeiras.

## 2. ORIGENS

Os estudiosos continuam a debater as origens precisas da sextina, o porquê do volume de poemas compostos de sextilhas entre os séculos XI e XIII. A invenção é comumente atribuída ao gigante literário do início do século XIII Arnaut Daniel no seu poema *O firme intento que em mim entra*, na tradução portuguesa de Augusto de Campos. Na época, o seu virtuosismo poético era incontestável e a sextina era um desafio deliberado para tornar a poesia amorosa tão difícil quanto possível, obrigando o poeta a utilizar um padrão de palavras repetidas e, em simultâneo, a cativar a atenção da noiva.

Sextinas bem compostas podem fazer parecer a repetição totalmente necessária à narrativa em desenvolvimento, de acordo com a visão convencional, ou podem enfatizar cada palavra final deliberadamente para dar realce à estrutura. Exemplos modernos do padrão incluem *The Painter*, de John Ashbery e Paul Muldoon, na extraordinária obra *Yarrow*. Existem várias revistas literárias modernas como a *McSweeney's* em São Francisco que, em

tempos, publicava propositadamente sextinas para afastar os poetas amadores. Mencionar a palavra “sextina” em qualquer oficina de poesia pode provocar um calafrio aos participantes, dada a sua complexidade. Uma antologia recente [1] contém uma ampla gama de variações sobre o tema, incluindo mesmo *cartoons*.

## 3. QUESTÕES MATEMÁTICAS

A sextina deve o nome às seis palavras finais que ocorrem em seis arranjos diferentes dos versos, regidos por um procedimento permutacional estrito que determina cada novo arranjo.

Tal procedimento vale para qualquer número natural  $m$ ? Se a resposta for negativa, então para que números  $m$  valerá? Existem infinitos números desses?

Podemos descrever a permutação da sextina como uma aplicação do seguinte modo: Seja  $m$  o número de versos e seja  $n$  a palavra final da  $n$ -ésima linha do verso  $p$ . Então a palavra  $n$  deve terminar o verso da estrofe  $(p + 1)$  conforme a regra

$$n \mapsto \begin{cases} 2n & \text{se } n \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \\ 2m + 1 - 2n & \text{se } \lfloor \frac{m}{2} \rfloor < n \leq m \end{cases} \quad (1)$$

onde  $m$  é o número de versos numa estrofe e  $\lfloor \cdot \rfloor$  representa a parte inteira do número. Assim, para  $m = 6$  temos

$$1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 4, \quad 3 \mapsto 6, \quad 4 \mapsto 5, \quad 5 \mapsto 3, \quad 6 \mapsto 1, \quad (2)$$

conforme na figura (1).

Para uma sextina funcionar corretamente, cada uma das palavras finais deve ter retorno no final do verso  $n$  de cada estrofe, para  $n = 1, 2, \dots, m$ . Tal realmente ocorre se  $m = 6$  como mostra a tabela 1 e o poema apresentado neste artigo ilustra. Aqui, cada palavra final ocupa uma vez cada posição e cada verso dentro de uma estrofe tem cada palavra final precisamente uma vez durante o poema. Se se construísse um sétimo sexteto de acordo com a regra (1), então a ordem das palavras finais seria idêntica à da primeira estrofe. Assim, a permutação é um ciclo de comprimento seis.

A construção funciona claramente para  $m = 6$ . Um teste simples, no entanto, mostra que algo está errado se  $m = 7$ , ou  $m = 8$ , *vide* tabelas 2 e 3 respetivamente.

Estritamente falando, devemos sempre escolher um número par para  $m$ , de modo a que haja uma coda de comprimento  $m/2$  com cada verso contendo duas palavras finais. Mas, para fins matemáticos, vamos ignorar esta restrição.

estrofe	um	dois	três	quatro	cinco	seis
verso 1	1	6	3	5	4	2
verso 2	2	1	6	3	5	4
verso 3	3	5	4	2	1	6
verso 4	4	2	1	6	3	5
verso 5	5	4	2	1	6	3
verso 6	6	3	5	4	2	1

estrofe	um	dois	três	quatro	cinco	seis	sete
verso 1	1	7	4	2	1	7	4
verso 2	2	1	7	4	2	1	7
verso 3	3	6	3	3	3	6	3
verso 4	4	2	1	7	4	2	1
verso 5	5	5	5	5	5	5	5
verso 6	6	3	6	3	6	3	6
verso 7	7	4	2	1	7	4	2

estrofe	um	dois	três	quatro	cinco	seis	sete	oito
verso 1	1	8	4	2	1	8	4	2
verso 2	2	1	8	4	2	1	8	4
verso 3	3	7	5	6	3	7	5	6
verso 4	4	2	1	8	4	2	1	8
verso 5	5	6	3	7	5	6	3	7
verso 6	6	3	7	5	6	3	7	5
verso 7	7	5	6	3	7	5	6	3
verso 8	8	4	2	1	8	4	2	1

#### 4. A IMPORTÂNCIA DE SER CÍCLICO

Chamamos a  $m$  **número sextina** se a permutação representada em (1) no conjunto de  $m$  inteiros tiver um período mínimo de  $m$ .

Resultados básicos da teoria do grupo simétrico garantem que qualquer elemento do grupo  $S_n$  tem uma única representação mínima em termos de ciclos disjuntos.

Tomemos a permutação (1) com  $m = 6$ , conforme descrito em (2) e na tabela 1. Como já mencionado, uma maneira mais compacta de escrever é olhando para a órbita da posição da primeira palavra final após cada aplicação sucessiva da permutação, veja-se a figura 3.

Ou seja, seguindo as setas em redor do círculo da figura 3, vemos que a primeira palavra final da primeira

**Tabela 1.** Posição das palavras finais de cada verso nas seis estrofes de uma sextina de estrofes de seis versos. O número 1 representa a palavra que termina o primeiro verso da primeira estrofe, 2 representa a palavra que termina o segundo verso da primeira estrofe, etc. A palavra final do primeiro verso move-se para o segundo verso, a palavra final do segundo verso move-se para o quarto verso, e assim por diante.

**Tabela 2.** Semelhante à tabela 1, mas para  $m = 7$ . Note-se que o quinto verso de cada estrofe termina sempre com a mesma palavra. Ou seja, o número 5 é um ponto fixo da regra (1). Também os sexto e terceiro versos compartilham as mesmas duas palavras repetidamente (6, 3). É um ciclo de dois períodos de (1).

**Tabela 3.** Semelhante à tabela 1 mas para  $m = 8$ . De notar que o padrão se repete na quinta estrofe, de modo que a palavra no fim do primeiro verso da primeira estrofe só termina o primeiro, o segundo, o quarto e o oitavo versos de qualquer estrofe subsequente, nunca o terceiro, o quinto, o sexto ou o sétimo. De facto, (1, 8, 4, 2) é um período do ciclo de quatro elementos da regra (1), como o é (3, 7, 5, 6).

estrofe se torna a segunda palavra final da segunda estrofe, a quarta palavra final da terceira estrofe, a quinta palavra final da quarta, e assim por diante. A representação circular também permite encontrar a órbita de qualquer outra palavra final. Por exemplo, para ver o que acontece com a terceira palavra final da primeira estrofe, começamos com o número 3 no mostrador do relógio e seguimos as flechas seis vezes. Então, na segunda estrofe, essa palavra termina o sexto verso; termina também o primeiro verso da terceira estrofe, e assim por diante. Em notação mais compacta, temos

$$(1, 2, 4, 5, 3, 6),$$

onde os parênteses significam “e repita”. O motivo pelo qual  $m = 6$  é um número sextina é que existe uma repre-

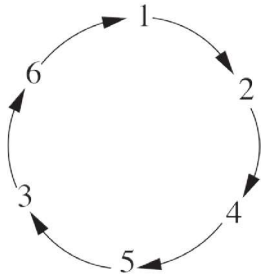


Figura 3. A órbita das palavras finais para uma sextina de comprimento  $m = 6$ .

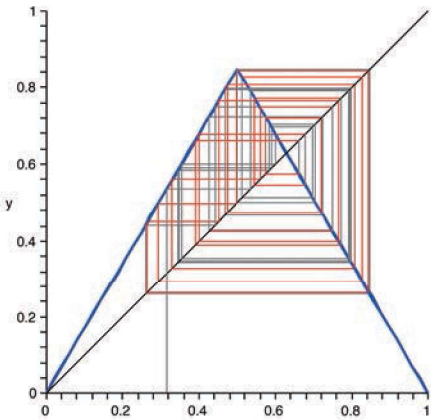


Figura 4. Construção da dinâmica da aplicação tenda através do chamado processo de teia de aranha. Aqui  $y$  é substituído na unidade seguinte de tempo, pelo seu valor obtido pela fórmula em (3). Esse valor é considerado o próximo valor de  $y$  na mesma fórmula, e assim sucessivamente. Este processo de *feedback* é representado como a reflexão do valor da imagem de um determinado valor de  $y$  na linha a  $45^\circ$ .

Tabela 4. Estrutura do ciclo da permutação sextina para os primeiros valores de  $m$ .

$m$	representação cíclica	$m$ é um número sextina?
1	(1)	sim
2	(12)	sim
3	(123)	sim
4	(123) (4)	não
5	(12435)	sim
6	(124356)	<b>sim</b>
7	(1247) (36) (5)	não
8	(1248) (3657)	não

sentação do efeito da transformação (1) em termos de um único ciclo. Se tentarmos o mesmo por  $m = 7$ , com base nas informações da tabela 2, vemos que a permutação é agora escrita na forma

$$(1, 2, 4, 7) (3, 6) (5)$$

que possui três ciclos disjuntos. As palavras finais dos versos um, dois, quatro e sete são permutadas conforme o seu ciclo, os versos três e seis trocam palavras finais entre estrofes sucessivas, enquanto o quinto verso termina sempre com a mesma palavra.

Da mesma forma, para  $m = 8$ , temos

$$(1, 2, 4, 8) (3, 6, 5, 7)$$

dois 4-ciclos e, por exemplo, para  $m = 12$ , temos

$$(1, 2, 4, 8, 9, 7, 11, 3, 6, 12) (5, 10)$$

um ciclo de 10 elementos e um ciclo de 2.

Assim, estabelecemos um critério para um número natural  $m$  ser um número sextina: que a permutação (1) possa ser expressa como um único ciclo de comprimento  $m$ . A tabela 4 elenca a representação do ciclo para os primeiros números  $m$ . Observe-se que não há um padrão óbvio que determine que valores  $m$  levam a um único  $m$ -ciclo. É precisamente esse padrão que pretendemos descobrir no resto deste artigo.

## 5. CAOS POÉTICO

A equação (1) pode ser representada como um sistema dinâmico discreto atuando nos primeiros  $m$  inteiros. Tomando  $y = 2j / (2m + 1)$ , mostra-se que a iteração repetida de (1) é equivalente à dinâmica da **aplicação tenda** para  $y \in [0, 1]$ :

$$y \mapsto \begin{cases} 2y & \text{se } y \leq 1/2, \\ 2 - 2y & \text{se } 1/2 < y \leq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Em vez dos números inteiros de 1 a  $m$ , temos agora os pontos  $2j / (2m + 1), j = 1, \dots, m$  distribuídos entre 0 e 1. Para qualquer valor de  $m$ , chamaremos a esses pontos **pontos sextina**.

A dinâmica do mapa é representada graficamente na figura 5. Para maior precisão, esta é a aplicação tenda com inclinação 2, que faz parte da família geral de aplicações tenda

$$y \mapsto \begin{cases} \mu y & \text{se } y \leq 1/2, \\ \mu(1 - y) & \text{se } 1/2 < y \leq 1, \end{cases} \quad (4)$$

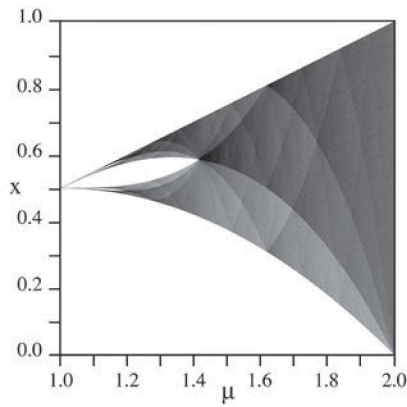


Figura 5. Diagrama de bifurcação mostrando pontos no atrator da aplicação tenda (4) por  $0 \leq \mu \leq 2$ . Para  $\mu = 1$ , existe apenas um único ponto de atração.

com inclinação  $\mu > 0$  [4]. Uma análise simples mostra que se  $\mu < 1$ , o ponto fixo  $x = 0$  é o único atrator do sistema. Em particular, todas as condições iniciais convergirão para  $x = 0$  por iteração repetida de (4). Se  $\mu = 1$ , todos os pontos com  $y \leq 1/2$  são pontos fixos deste sistema dinâmico.

Quando  $\mu > 1$ , as coisas ficam bem interessantes. Veja-se a figura 5. De facto, entre os mapas caóticos, a aplicação tenda é muito especial por causa do ponto anguloso em  $y = 1/2$ . À medida que  $\mu$  aumenta para 1, a dinâmica torna-se imediatamente caótica. Ainda existem dois pontos fixos,  $y = 0$  e  $y = \mu/(\mu + 1)$ , mas ambos são instáveis. Para  $1 < \mu < \sqrt{2}$ , o atrator do mapa divide-se em dois subintervalos disjuntos de  $(0,1)$ . As condições iniciais arbitrárias são atraídas para esses dois subintervalos dentro dos quais há um ciclo caótico de pontos. Para  $\sqrt{2} \leq \mu \leq 2$  os intervalos disjuntos começam a sobrepor-se.

Para  $\mu = 2$ , como sucede no mapa de sextina, o caos é completo. Ou seja, quase todas as condições iniciais fazem parte do conjunto caótico e cada região do conjunto caótico é visitada com igual probabilidade. A partir de alguns valores arbitrários de  $y$  no intervalo  $(0,1)$  e iterando repetidamente a fórmula (3), obtemos uma sequência infinita de valores de  $y$  que nunca se repete. A sequência eventualmente visita valores arbitrariamente próximos de cada valor de  $y$  no intervalo  $[0,1]$ . Além disso, não há pontos que comecem nesse intervalo e dele se afastem.

Incorporada dentro do caos, no entanto, há uma infinidade (numerável) de órbitas periódicas instáveis com todos os períodos possíveis. Em particular, todas as condições iniciais racionais de (3) estão em órbitas periódicas. Para verificar que assim é, note-se que se uma condição

inicial  $y = p/q$  para números inteiros  $p$  e  $q$ , então todas as imagens deste ponto devem ser expressas como uma fração  $r/q$  para certo inteiro  $r$ . Além disso, o mapa leva o intervalo da unidade para si próprio, portanto,  $0 \leq r \leq q$ . Como existem apenas  $q + 1$  dessas frações, esta deve ser uma órbita periódica de período no máximo  $q + 1$ . Em particular, estamos interessados no caso de que  $q = N$  para ímpares  $N = 2m + 1$  e pares  $p = 2n$  para alguns  $n \leq m$ .

A questão que devemos abordar então é: qual é a imagem sob a iteração repetida de (3) da condição inicial específica  $y = 2/(2m + 1)$ , para cada número inteiro ímpar  $2m + 1$ ? Se essa órbita tiver um período mínimo  $m$ , então temos que  $m$  é um número sextina. A única outra possibilidade é que essa condição inicial esteja numa órbita periódica com um período mais baixo  $q$ . Então, parece que devemos procurar condições para a existência de órbitas periódicas de (3) (e, portanto, de (1)) de período arbitrário  $q \leq m$ .

## 6. CONDIÇÕES PARA CICLOS

O exemplo na tabela 2 acima mostra que  $m = 7$  não é um número sextina porque existe um ponto fixo (um 1-ciclo) e um 2-ciclo. Além disso, na tabela 3,  $m = 8$  não é um número de sextina porque a permutação é decomposta em dois 4-ciclos disjuntos. Portanto, para caracterizar que números *não* são números sextina, precisamos de considerar condições para uma posição  $j$  ( $0 < j \leq m$ ) para fazer parte de um ciclo de período  $q$ , para  $q \leq m$ .

Consideremos primeiro o caso de um ponto fixo. O ponto fixo para o mapa está na interseção entre o mapa e a linha  $x = y$ , e (não considerando o ponto fixo trivial  $x = 0$  que não é relevante aqui) ocorre em  $x = 2/3$ . Se um dos pontos de  $m$  sextina,  $x_j = 2j/(2m + 1)$ ,  $j = 1, \dots, m$  coincide com o valor  $x = 2/3$ , ocorrerá um ciclo e o número  $m$  (se diferente de 1) não será um número sextina. Isso vai acontecer para todos os números  $m$  de modo que

$$\frac{2j}{2m + 1} = \frac{2}{3}$$

ou

$$3|(2m + 1)$$

e é obviamente o caso de  $m = 7$ .

Se estudarmos a condição para 2 ciclos, precisamos de encontrar os locais para pontos de período-2 da aplicação tenda. Esses pontos estão localizados onde o mapa *repetido duas vezes* cruza a linha  $x = y$ , ou seja, em  $x = 2/5, 2/3, 4/5$ , veja-se a figura 6. Para os pontos sextina coincidirem com

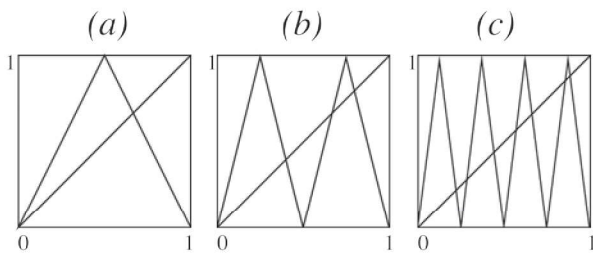


Figura 6. Localização dos pontos de (a) período-1 (ponto fixo), (b) período-2 e (c) período-3 para o mapa é a abscissa da interseção entre tendas repetidas e a linha  $y = x$ .

esses valores, verificamos que além de  $3|(2m + 1)$  também:

$$\frac{2j}{2m+1} = \frac{2}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{2j}{2m+1} = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{2j}{2m+1} = \frac{4}{5}.$$

A condição do meio, dá-nos  $3|(2m + 1)$  (porque uma órbita de período 1 é também uma órbita de período 2) mas agora temos de excluir

$$5|(2m + 1)$$

para evitar órbitas de período 2, assim esta condição evita que  $m$  (se diferente de 2) seja um número sextina. Para  $m = 7$  temos simultaneamente um 1-ciclo e um 2-ciclo, visto que 3 e 5 são ambos fatores de  $(2m + 1)$ .

3-ciclos ocorrem (ver figura 6) nos  $2^3 - 1$  valores  $x = 2/9, 2/7, 4/9, 4/7, 6/9, 6/7, 8/9$ , e coincidirão com os valores de sextina  $7|(2m + 1)$  ou  $9|(2m + 1)$ .

Continuando desta forma, descobrimos que:

**Proposição 1.** Os pontos  $q$ -ciclo estão localizados em

$$x = \frac{2}{2^q + 1}, \frac{2}{2^q - 1}, \frac{4}{2^q + 1}, \frac{4}{2^q - 1}, \dots, \frac{2k}{2^q - 1}, \dots, \dots, \frac{2^q - 2}{2^q + 1}, \frac{2^q - 2}{2^q - 1}, \frac{2^q}{2^q + 1}$$

□

No total, existem  $2^q - 1$  desses pontos.

Se existe um  $j$  tal que uma das sextinas leva  $x = 2j/(2m + 1)$  a coincidir com um ponto  $q$ -ciclo, a permutação de sextina contém um  $q$ -ciclo.

Isso acontece quando  $\exists j, k \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, m$  e  $k = 1, \dots, 2^{m-1}$  de modo que

$$\frac{2j}{2m+1} = \frac{2k}{2^q \pm 1}$$

ou

$$k(2m + 1) = j(2^q \pm 1).$$

A condição necessária de existência de pelo menos um  $q$ -ciclo ( $q \leq m$ ) para uma permutação de sextina acima de  $m$  encontra-se na seguinte

**Proposição 2.** Para qualquer número ímpar  $2m + 1$ , deve haver um número  $q \leq m$  tal que  $(2m + 1)|(2^q \pm 1)$ . □

Agora estamos em posição de determinar as condições necessárias e suficientes para que um número  $m$  seja um número sextina. O primeiro ponto de sextina ( $j = 1$ ) deve fazer parte de um  $m$ -ciclo que o leva a todas as outras posições, ou seja, o  $m$ -ciclo não é causado por sucessivos  $q$ -ciclos em que  $q$  é um fator de  $m$ :

**Teorema 1.** Um número  $m$  é um número sextina se e somente se  $(2m + 1)|(2^m \pm 1)$  e  $(2m + 1) \nmid (2^q \pm 1)$  para qualquer  $q$  que seja um fator de  $m$ . □

O corolário a seguir fornece um pouco mais de informação.

**Corolário 1.** Seja  $2m + 1$  um número primo que divide  $2^m \pm 1$ . Se  $m$  também é primo, então  $m$  é um número sextina.

*Demonstração.* O corolário resulta imediatamente do teorema 1, já que se  $m$  é primo, os seus únicos fatores são 1 e  $m$ .

## 7. DISCUSSÃO

A descrição acima dos números de sextina é de alguma forma pouco satisfatória. Baseia-se na fatorização de grandes primos da forma  $2^m \pm 1$ . Como é sabido, essa fatorização pode ser uma tarefa computacional complexa. De facto, a abordagem por força bruta de simplesmente deixar que os números conduzam uma dança [7], ou seja, iterando o mapa  $m$  vezes e verificando se isso origina um  $m$ -ciclo, fornece um método muito mais rápido (ordem  $m$ ) de decidir se  $m$  é um número sextina.

Há, talvez, uma lição a tirar daqui. Somos educados a acreditar que o entendimento completo de um subconjunto dos números naturais é alcançado apenas quando temos uma fórmula fechada, uma única equação para descrever os membros do conjunto. Isso certamente estava na mente de alguns dos autores de [3] quando decidiram descobrir que números são números de sextina.

Como se vê, a propriedade definidora mais simples dos números de sextina é aparentemente a própria per-

mutação de sextina; essa é uma caracterização algorítmica e não uma fórmula fechada, da mesma maneira que os números primos (e primos gêmeos, etc.) parecem permitir apenas uma descrição algorítmica, não uma fórmula fechada. É possível que, em certo sentido, isso seja típico; que devemos considerar algoritmos a norma, e fórmulas fechadas, exceções milagrosas.

Usando o algoritmo, é uma tarefa computacional direta descobrir todos os números sextina menores do que um certo inteiro positivo. Aqui, por exemplo, está uma lista de todos os números de sextina até  $m = 200$  :

1, 2, 3, 5, 6, 9, 11, 14, 18, 23, 26, 29, 30, 33, 35, 39, 41, 50,  
51, 53, 65, 69, 74, 81, 83, 86, 89, 90, 95, 98, 99, 105, 113,  
119, 131, 134, 135, 146, 155, 158, 173, 174, 179, 183, 186,  
189, 191, 194

A caracterização algorítmica, ou a verificação direta, ou a descrita neste artigo, tem obviamente uma desvantagem em comparação com uma fórmula fechada: ela não nos diz imediatamente se existem infinitos números de sextina. Esta questão ainda está em aberto.

## REFERÊNCIAS

- [1] *The Incredible Sestina Anthology*. D. Nestor, (Editor), Write Bloody Publishing, USA (2013), ISBN: 978-1938912-36-9.
- [2] *Rimas by Luís de Camões*. Editor: Álvaro Júlio da Costa Pimpão. Coimbra: Acta Universitatis Conimbrigensis (1953), 460.
- [3] A. Champneys, P. G. Hjorth, H. Mann, *The Numbers Lead a Dance, Non-Linear Partial Differential Equations, Mathematical Physics, and Stochastic Analysis*. EMS Congress Reports (2018) (55-71), ISBN 978-3-03719-186-6.
- [4] R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* Cambridge, Mass: Addison-Wesley (1989)
- [5] S. Fry, *The Ode Less Travelled: Unlocking the Poet Within*. London: Arrow (2007).
- [6] L. Schimel, *Poetic license: some thoughts on sestinas*. *Writing-World.com* published online at [www.writing-world.com/poetry/schimel4.shtml](http://www.writing-world.com/poetry/schimel4.shtml) accessed 20/09/2016 (2001).
- [7] Sting: *Shape of My Heart*, on *Ten Summoner's Tales*, copyright 1993 UMG Recordings, Inc.
- [8] C. B. Whitlow and M. Krysi, *Obsession: Sestinas in the Twenty-First Century*. Dartmouth College Press (2014).

### SOBRE O AUTOR

**Poul G. Hjorth** é professor de Matemática Aplicada na Universidade Técnica da Dinamarca (DTU). Estudou na Universidade de Copenhaga e na Universidade da Califórnia, San Diego. É também investigador em Sistemas Dinâmicos e em Matemática Industrial.