José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

A CONJETURA DE COLLATZ

A conjetura de Collatz é um dos mais famosos problemas em aberto da matemática. E os matemáticos têm estado ativos a investigá-la. Vamos ver alguns resultados que têm sido obtidos sobre este assunto.

A CONJETURA

Se n for um número natural, seja

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ n/2 & \text{se } n \text{ for par;} \end{cases}$$

é claro que *f(n)* também é um número natural. Consideremos o seguinte problema: dado um número natural n, se formos calculando *f(n)*, $f\big(f(n)\big)$ e assim por diante, o que é que obtemos? Para vermos alguns exemplos, vai ser usada a seguinte notação: sempre que se escrever $a \mapsto b$, o que isto significa é que $b = f(a)$.

Vamos então começar com $n = 1$. Neste caso, temos

$$1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$$

e, naturalmente, agora entra-se em ciclo. Ou seja, vamos sempre obter os números 4, 2 e 1, por esta ordem. Obtemos basicamente a mesma coisa se começarmos com 2 ou com 4.

Se começarmos com 3, obtemos:

$$3 \mapsto 10 \mapsto 5 \mapsto 16 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1.$$

E, se começarmos com 7, obtemos

$$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \mapsto 52 \mapsto 26 \mapsto 13 \mapsto \\ \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto 10 \mapsto 5 \mapsto 16 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1.$$

Este padrão parece repetir-se: seja qual for o n inicial que tomemos, acabamos sempre por ir parar a 1. Será que é sempre assim? A afirmação de que isto, de facto, acontece sempre é conhecida por *conjetura de Collatz*, cujo nome tem origem num matemático alemão, Lothar Collatz (1910–1990), que pensou em problemas deste tipo na década de 1930, embora não seja certo se ele foi o primeiro a pensar neste problema em particular.[1] O problema só se tornou conhecido a partir de 1950; veja-se [4] para mais detalhes. A página de Eric Roosendaal sobre a conjetura de Collatz também merece ser consultada.[2]

Como a palavra «conjetura» sugere, o problema está em aberto. E é considerado muito difícil. Paul Erdös afirmou que «a matemática talvez não esteja pronta para estes problemas» e Jeffrey C. Lagarias, o autor de [4], é da opinião de que «este é um problema extraordinariamente difícil, completamente fora do alcance da matemática atual».

O QUE É QUE JÁ SE SABE?

Quando um problema está em aberto, os matemáticos que pensam nele tentam as mais diversas abordagens. Podem pensar, por exemplo, em fazer simulações por computador, tentar resolver problemas semelhantes, estudar casos particulares, e assim por diante. Vamos ver alguns resultados que têm sido obtidos relativamente à conjetura de Collatz.

É claro que este problema se presta a ser estudado por meio de computadores. E este estudo permitiu constatar que a conjetura é verdadeira para qualquer número natural com menos de 20 algarismos. Naturalmente, isto tende a levar as pessoas a pensar que a conjetura é verdadeira, mas há exemplos de outras conjeturas relativamente às quais se conseguiu provar que são válidas para todos os números até um valor muito grande mas para as quais acabou por ser possível provar que não se verificam sempre.

Ao descrever-se a conjetura de Collatz, foi mencionado o ciclo $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$. Haverá outros ciclos? Se houver, a conjetura será falsa, claro. Pois bem: sabe-se que, caso haja mais algum ciclo, terá de ter, no mínimo, 338 466 909 números![3] Em 1995, o já mencionado Jeffrey C. Lagarias provou, juntamente com um colega, David Applegate, que, se m for um número natural suficientemente grande, então o conjunto dos números naturais $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$ para os quais a conjetura de Collatz é válida tem mais do que $m^{0,81}$ elementos; veja-se [1]. Oito anos mais tarde, o mesmo Lagarias provou, juntamente com outro colega, Ilia Krasikov, que o mesmo acontece se se usar $m^{0,84}$ em vez de $m^{0,81}$; veja-se [3]. Estes resultados permitem concluir que, mesmo que a conjetura não seja válida em geral, é válida para a maior parte dos números naturais.

Para continuar, convém introduzir uma notação apropriada. Se $n \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$\{n, f(n), f(f(n)), \ldots\} \tag{1}$$

é um conjunto não vazio de números naturais e, portanto, tem um elemento mínimo, o qual vai ser representado por $\mathrm{Col}_{\min}(n)$. Com esta notação, a conjetura de Collatz afirma que se tem sempre $\mathrm{Col}_{\min}(n) = 1$ e é fácil ver que a conjetura é verdadeira se se conseguir provar que se tem $\mathrm{Col}_{\min}(n) < n$ para cada número natural n maior do que 1. Note-se que, como n pertence ao conjunto (1), é claro que $\mathrm{Col}_{\min}(n) \leqslant n$. De facto, se n é um número natural par, $f(n) = n/2 < n$ e, portanto, em metade dos casos o conjunto (1) contém algum elemento menor do que n, ou seja, $\mathrm{Col}_{\min}(n) < n$. Acontece que Riho Terras provou em [5] que para quase todos os números naturais (num sentido preciso), $\mathrm{Col}_{\min}(n) < n$. Dezoito anos mais tarde, Ivan Korec provou algo mais forte: para quase todos os números naturais, $\mathrm{Col}_{\min}(n) < n^{0,8}$; veja-se [2].

Recentemente, Terence Tao[4] (*foto ao lado*) publicou uma demonstração de que, se f for qualquer função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$, então $\mathrm{Col}_{\min}(n) < f(n)$ para quase todos os números naturais. Aqui, o significado de «quase todos» também tem um sentido preciso, embora distinto do sentido dado por Terras.


Foto: Alyssa Bierce/UCLA

Todos estes resultados apontam no mesmo sentido: a conjetura de Collatz é válida para uma grande proporção do conjunto dos números naturais.

QUE IMPACTO PARA O FUTURO?

Em que é que estes resultados poderão ajudar a dar origem a uma eventual demonstração da conjetura? Provavelmente pouco. A experiência histórica mostra que este tipo de resultados parciais geralmente tem pouco a ver com a resolução final do problema. Mas é um erro pôr-se ênfase nisto. Como o próprio Terence Tao fez notar,[5] é contraprodutivo que um matemático aposte unicamente em tentar resolver grandes problemas em aberto. Um dos objetivos da pesquisa em matemática consiste em ir expandindo os conhecimentos de que já dispomos e os resultados atrás mencionados enquadram-se nisto.

REFERÊNCIAS

[1] D. Applegate; J. C. Lagarias, *Density bounds for the 3x+1 problem. II. Krasikov inequalities*, Math. Comp. 64 (1995), no. 209, 427–438

[2] Ivan Korec, *A density estimate for the 3x+1 problem*, Math. Slovaca 44 (1994), nº.1, 85–89

[3] I. Krasikov; J. C. Lagarias, *Bounds for the 3x+1 problem using difference inequalities*, Acta Arith. 109 (2003), nº.3, 237–258

[4] J. C. Lagarias, *The Ultimate Challenge: The 3x+1 Problem*, American Mathematical Society (2010)

[5] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arith. 30 (1976), nº. 3, 241–252

1 Podem ser vistas as recordações de Collatz sobre o início do seu envolvimento neste problema em *http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/paper/goodies/ubersetzung/html/ubersetzung.html*

2 *http://www.ericr.nl/wondrous/*

3 *http://www.ericr.nl/wondrous/cycles.html*

4 *https://terrytao.wordpress.com/2019/09/10/almost-all-collatz-orbits-attain-almost-bounded-values/*

5 *https://terrytao.wordpress.com/career-advice/dont-prematurely-obsess-on-a-single-big-problem-or-big-theory/*