O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO EM AÇÃO

José Luiz Pastore Mello
Colégio Santa Cruz - Brasil/SP
jlpmello@uol.com.br

“As desigualdades podem ser mais interessantes do que as identidades. Eu não conheço muitas coisas mais belas e perfeitas do que uma desigualdade matemática absoluta.”

Fernando Codá, matemático brasileiro, em entrevista para *Notices/AMS*, fev./2016.

1. A LENDA DE CARTAGO

No épico Eneida do século I A.C. o poeta Virgílio conta-nos sobre a fundação de Cartago. Segundo a lenda, a rainha fenícia Elissa, que depois passa a chamar-se Dido, foge do seu irmão Pigmaleão, que havia mandado matar o seu marido por cobiça, embarcando num navio que a leva até ao norte de África. Lá chegada, Dido resolve ficar e formar a sua nova pátria negociando com o rei Jarbas a compra de terras. De acordo com o que ficou acertado, ela só poderia comprar a quantidade de terras que conseguisse cercar usando a pele de um único boi. A esperta Dido cortou e emendou várias tiras do couro formando um extenso cordame. Já que o seu interesse era o de cercar a maior extensão possível de terras, Dido ordenou que usassem o cordame cercando a colina de Birsa em forma de semicírculo. Com o tempo, a cidade expandiu-se, transformando-se em Cartago. As ruínas que restaram de Cartago estão localizadas atualmente nos arredores da cidade de Túnis, na Tunísia.

Não sabemos se tal lenda retrata os factos como realmente aconteceram, mas é curioso observar que o problema da busca da forma plana que maximiza a área para certo perímetro é de natureza matemática e provavelmente tão antigo quanto a lenda de Cartago. Tal problema recebe o nome de isoperimétrico.

Da geometria diferencial às equações diferenciais parciais, não faltam exemplos de desdobramentos do problema isoperimétrico. Mas e na matemática escolar, há espaço para ele?

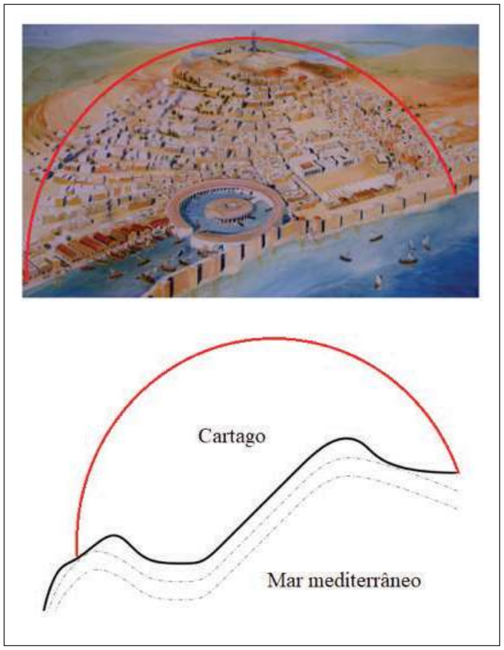

Figura 1. Representação aproximadamente semicircular do contorno da cidade de Cartago.

Figura 2. Ruinas de Cartago.

Figura 3.

2. O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

O problema isoperimétrico no plano é considerado um dos clássicos mais importantes da matemática, com desdobramentos em inúmeras áreas de investigação. O seu enunciado diz o seguinte:

> *Dado um comprimento $L > 0$, encontrar, de entre todas as curvas do plano de comprimento L, aquela que engloba a maior área.*

Esta forma do enunciado, também chamada de primal, possui versão equivalente, chamada dual. A solução do problema primal está completamente determinada pela do seu dual, e vice-versa. O enunciado dual do problema isoperimétrico diz o seguinte:

> *Dada uma área $A > 0$, encontrar, de entre todas as curvas que englobam esta área, a que tem menor perímetro.*

A solução do problema isoperimétrico afirma que a relação entre L e A sempre será expressa pela desigualdade $4\pi A \leq L^2$, sendo que a igualdade ocorrerá quando a curva fechada for um círculo. Desse resultado decorre o facto de que polígonos convexos de perímetro L sempre terão área menor do que a de um círculo de circunferência L. Também vem daí a conclusão de que tal círculo será a curva fechada de maior área possível de entre todas as curvas fechadas de comprimento L.

3. O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO E A DIVISÃO ÓTIMA DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO

É bem conhecido o resultado de que a mediana de um triângulo tem a propriedade de o dividir em dois triângulos com a mesma área, mas será que a mediana é o segmento de reta mais curto a cumprir tal propriedade? Analisaremos esse problema num triângulo equilátero EDF, de lado 1, com P e Q sendo pontos de lados distintos desse triângulo, como indica a figura 4. Interessa-nos encontrar a menor medida $PQ = z$ na comparação das situações em que $\overline{PQ}$ divide a área do triângulo ao meio.

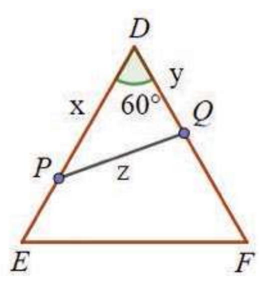

Figura 4.

Como $\overline{PQ}$ divide a área de EDF ao meio, então o triângulo DPQ e o quadrilátero $EPQF$ possuem áreas iguais $\sqrt{3}/8$, o que permite concluir que:

$$\frac{x \times y \times \operatorname{sen} 60^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}, \text{ ou seja } xy = \frac{1}{2}.$$

Aplicando a lei dos cossenos em DPQ, teremos:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \times \cos 60^\circ,$$

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2},$$

$$\text{o que implica em } z^2 = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}.$$

Agora usaremos um truque algébrico útil. Somando e subtraindo $2xy$ do lado esquerdo da última igualdade, teremos:

$$z^2 = x^2 - 2xy + y^2 - \frac{1}{2} + 2xy,$$

$$z^2 = (x-y)^2 + \frac{1}{2}, \text{ ou seja, } z = \sqrt{(x-y)^2 + \frac{1}{2}}.$$

Observe agora que o valor mínimo de z ocorrerá quando x=y, caso em que $\overline{PQ}$ será paralelo a $\overline{EF}$ e z terá comprimento igual a $\sqrt{2}/2$. Mais algumas contas e concluímos facilmente que, na situação ótima, o triângulo DPQ será equilátero, com $x = y = z = \sqrt{2}/2$.

Como cada mediana de $EDF\,(x = 1,\ y = 1/2)$ mede $\sqrt{3}/2$, que é um número maior do que $\sqrt{2}/2$, fica agora evidente que há um segmento menor do que a mediana que atende as condições do problema. Por simetria rotacional observa-se a existência de dois outros segmentos congruentes a $\overline{PQ}$ que também resolvem o problema. São eles: $\overline{P'Q'}$ e $\overline{P''Q''}$, como mostra a figura 5.

Outro curioso resultado que também pode ser demonstrado em relação à figura 5 é o de que os três segmentos traçados decompõem o triângulo EDF em três losangos congruentes, três trapézios isósceles congruentes e um triângulo equilátero. Tente demonstrar.

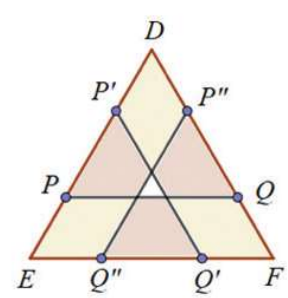

Figura 5.

Resolvido o problema com o uso de segmentos de reta, é natural que nos interesse saber se tal segmento, de comprimento $\sqrt{2}/2$, é a menor linha possível que divide a área do triângulo *EDF* ao meio. Surpreendentemente a menor linha não é um segmento de reta, mas sim uma curva, que encontraremos com a ajuda do problema isoperimétrico dual.

O problema será analisado por meio da investigação de três casos. No caso A, a curva une dois lados distintos do triângulo; no caso B, a curva começa e termina no mesmo lado do triângulo; e, no caso C, a curva não toca nenhum dos lados do triângulo, como mostra a figura 6.

Nos casos A e B, juntando-se adequadamente seis e dois triângulos idênticos, respetivamente, as linhas transformam-se em curvas fechadas contidas no interior de um hexágono regular e de um losango. De acordo com a solução dual do problema isoperimétrico, de entre todas as curvas com a mesma área da curva formada, a de menor perímetro sempre será uma circunferência, como mostra a figura 7.

Resta-nos calcular e comparar as medidas de $1/6$ da circunferência do caso A, $1/2$ da circunferência do caso B e a circunferência inteira do caso C. O menor dos três comprimentos indicará a curva mais curta que resolve o nosso problema. As contas a seguir indicam que o caso A é o vencedor.

Caso A:

Temos $\pi r^2 = 6 \times \dfrac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow r = \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\dfrac{27}{\pi^2}}$.

O comprimento de $1/6$ da circunferência será

$$\frac{1}{6} \times 2\pi \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{27}{\pi^2}} \approx 0,673.$$

Caso B:

Temos $\pi r^2 = 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow r = \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\dfrac{3}{\pi^2}}$.

O comprimento de meia circunferência será

$$\frac{1}{2} \times 2\pi \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{\pi^2}} \approx 1,166.$$

Caso C:

Temos $\pi r^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow r = \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\dfrac{3}{4\pi^2}}$.

O comprimento da circunferência será

$$2\pi \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{4\pi^2}} \approx 1,649.$$

Na figura 8, temos

$$PQ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707 > \text{med}\left(\widehat{MN}\right) \approx 0,673,$$

sendo que o arco de circunferência $\widehat{MN}$ é a menor curva que divide a área do triângulo *EDF* ao meio.

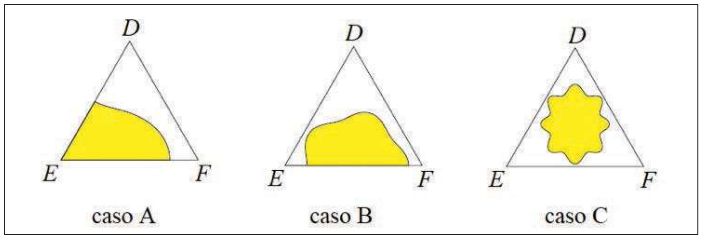

Figura 6.

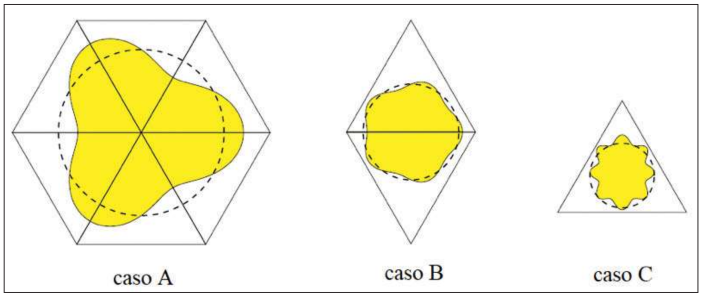

Figura 7.

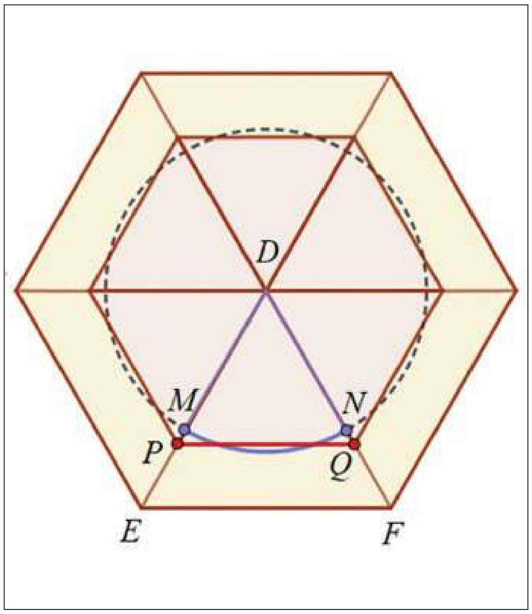

Figura 8.

4. A DIVISÃO ÓTIMA DO TRIÂNGULO RETÂNGULO ISÓSCELES

Analisaremos agora um triângulo isósceles ABC, de catetos $AC = BC = 1$ e hipotenusa $AB = \sqrt{2}$. Novamente, o objetivo será encontrar o comprimento do menor segmento de reta que divide a área do triângulo ao meio e, em seguida, da menor linha que divide a área de ABC ao meio.

Na investigação do menor segmento de reta, analisaremos o caso A, em que os pontos P e Q pertencem à hipotenusa e a um cateto do triângulo, e o caso B, em que os pontos P' e Q' pertencem aos catetos do triângulo, como indica a figura 9.

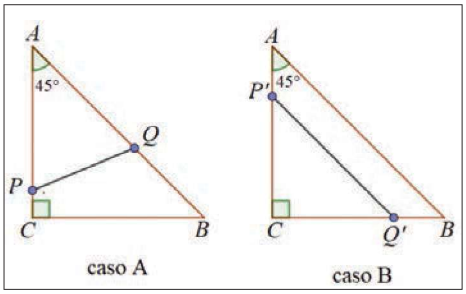

Figura 9.

Seguindo os mesmos passos da investigação feita no triângulo equilátero, começaremos pelo cálculo do comprimento de $\overline{PQ}$:

$$\frac{x \times y \times \operatorname{sen} 45^\circ}{2} = \frac{1}{4}, \text{ ou seja, } x \times y = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2 \times x \times y \times \cos 45^\circ,$$

$$z^2 = x^2 + y^2 - 1,$$

$$z^2 = x^2 - 2xy + y^2 - 1 + 2xy,$$

$$z^2 = (x-y)^2 + \sqrt{2} - 1, \text{ ou seja, } z = \sqrt{(x-y)^2 + \sqrt{2} - 1}.$$

O valor mínimo de z ocorre quando $x = y$ e, nesse caso, teremos

$$x = y = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} \text{ e } z = \sqrt{\sqrt{2} - 1} \approx 0,644.$$

No caso do comprimento de $\overline{P'Q'}$, observamos da área do triângulo $CP'Q'$ que

$$\frac{x' \times y'}{2} = \frac{1}{4}, \text{ ou seja, que } x'y' + = \frac{1}{2}.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $CP'Q'$, teremos:

$$(z')^2 = (x')^2 + (y')^2,$$

$$(z')^2 = (x')^2 - 2x'y' + (y')^2 + 2x'y', \text{ ou seja,}$$

$$z' = \sqrt{(x'-y')^2 + 1}.$$

O menor valor de z' ocorrerá quando $x' = y' = \sqrt{2}/2$ e, portanto, quando $z' = 1$.

Concluímos, agora, que o menor segmento de reta que divide a área do triângulo ao meio liga a hipotenusa e um cateto do triângulo, e tem comprimento aproximado de 0,644.

Finalizando a discussão, novamente recorreremos à ajuda da solução do problema isoperimétrico dual para encontrar a linha de comprimento mínimo. Analisaremos apenas os casos A e B, em que as curvas tocam dois lados do triângulo. Os casos em que elas tocam apenas um ou nenhum dos lados seguem raciocínio análogo e resultarão em comprimentos maiores do que o caso B, que é a solução ótima do problema.

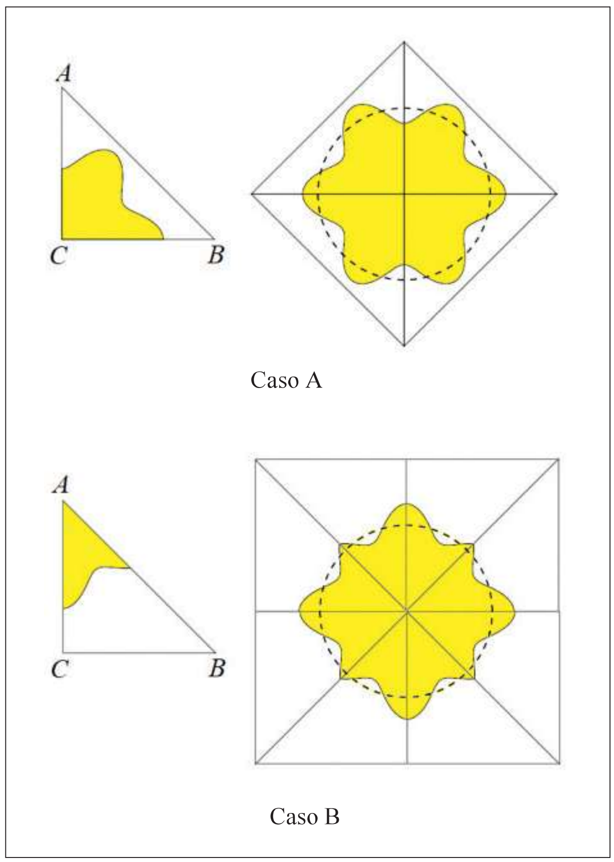

Figura 10.

Caso A:

Temos $\pi r^2 = 4 \times \frac{1}{4} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$.

O comprimento de 1/4 da circunferência será

$$\frac{1}{4} \times 2\pi \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \approx 0,886.$$

Caso B:

Temos $\pi r^2 = 8 \times \frac{1}{4} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi}$.

O comprimento de 1/8 da circunferência será

$$\frac{1}{8} \times 2\pi \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} \approx 0,627.$$

Na figura 11, temos

$$PQ = \sqrt{\sqrt{2}-1} \approx 0,644 > \text{med}\left(\widehat{MN}\right) \approx 0,627,$$

sendo que o arco de circunferência $\widehat{MN}$ é a menor curva que divide a área do triângulo CAB ao meio.

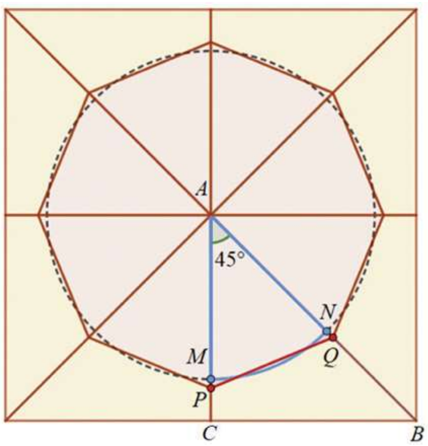

Figura 11.

Leitores interessados em explorar as inúmeras subtilezas, demonstrações e aplicações do problema isoperimétrico encontrarão excelente material de consulta nas referências [1] e [2]. E viva o poderoso problema isoperimétrico, também na matemática escolar!

REFERÊNCIAS

[1] KLASER, P. K., TELICHEVESKY, M. "O problema isoperimétrico". IV Colóquio de Matemática da Região Sul, Rio Grande/RS, FURG, 2016. Disponível em: *https://www.sbm.org.br/coloquio-sul-4/wp-content/uploads/sites/4/2016/04/Minicurso_Problema_Isoperimetrico.pdf*

[2] NIVEN, I. *Maxima and Minima without Calculus*. The Dolciani Mathematical Expositions, vol. 6, MAA, 1981.

[3] POLYA, G. *Mathematics and Plausible Reasoning - vol. I/II*. Martino Fine Books, Eastford, Connecticut, 2014.

[4] SILVA, J. N. "Matemática e assuntos divertidos". *Gazeta de Matemática*, n.º 182/183, julho e novembro de 2017, Portugal, SPM. Disponível em: *http://gazeta.spm.pt/arquivo*

SOBRE O AUTOR

José Luiz Pastore Mello, licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (www.ime.usp.br), mestre e doutor em Ensino de Matemática pela Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (www4.fe.usp.br). Professor de Matemática do Colégio Santa Cruz (www.santacruz.g12.br), em São Paulo, Brasil. Membro do conselho editorial da *Revista do Professor de Matemática* (rpm.org.br), editada pela Sociedade Brasileira de Matemática (www.sbm.org.br).